

Задача 1

Почтальон Печкин выехал из райцентра Сметанино в деревню Простоквашино с посылкой для кота Матроскина. Он ехал со скоростью 15 км в час, а расстояние, которое ему надо было проехать, составляет 15 км. Приехав в Простоквашино, он обнаружил, что по дороге потерял посылку, и сразу же поехал за ней обратно. Когда он нашел посылку, то подобрал ее и снова поехал к коту. Тем временем кот Матроскин, который хотел как можно быстрее получить посылку, сразу после выезда Печкина из Простоквашино побежал за почтальоном со скоростью 5 км в час, и получил посылку через полчаса из рук Печкина, который уже снова ехал в Простоквашино. На каком расстоянии от Сметанино Печкин потерял посылку?

Ответ: Печкин потерял посылку на расстоянии $x = L - t \cdot \left(\frac{v+V}{2}\right) = 10$ км от Сметанино.

Задача 2

На соревнованиях пахарей надо было как можно быстрее обработать трактором с навесными орудиями (боронами шириной 10 м) квадратный участок поля площадью 1 гектар (т.е. $100 \times 100 \text{ м}^2$). Трактор при этом мог двигаться только вперед со скоростью 2 м/с и совершать повороты с минимальным радиусом 10 м (по центру трактора) на той же скорости. Вне поля достаточно места для любых разворотов, и вся площадь поля должна быть проборонована. Предложите и нарисуйте на прилагаемом листе траекторию движения трактора, при движении по которой время, необходимое для обработки поля, будет как можно меньшим. Рассчитайте, чему равно это время.

Решение

Существует несколько вариантов, которые отличаются способами разворота.

Вариант 1 – разворот в виде петли, смещенной в сторону (рис. 1): $t = 672 \text{ с} = 11 \text{ мин. } 12 \text{ с}$.

Вариант 2 – разворот в виде несмещенной петли (рис. 2): $t \approx 668,1 \text{ с} \approx 11 \text{ мин. } 08 \text{ с}$.

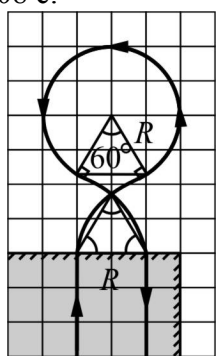


Рис. 2

Вариант 3 – разворот состоит только из дуг поворотов: вначале на угол $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41,4^\circ$ влево, затем на угол $\pi + 2\alpha \approx 262,8^\circ$ вправо, и в конце снова на угол $\alpha \approx 41,4^\circ$ влево (рис. 3). При этом $t \approx 655,8 \text{ с} \approx 10 \text{ мин. } 56 \text{ с}$.

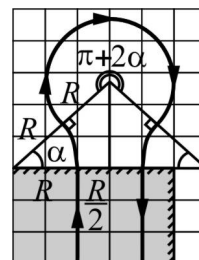


Рис. 3

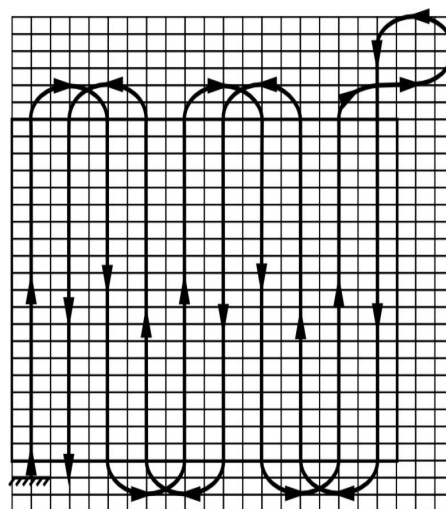


Рис. 1.

Задача 3

На легком горизонтальном рычаге с двумя опорами находятся пустые легкие бочки. Расстояние от оси левой бочки до левой опоры $a = 2$ метра, от оси правой бочки до правой опоры – $c = 3$ метра, расстояние между опорами $b = 1$ метр. В обе бочки одновременно начинают наливать с небольшой скоростью воду из разных кранов. Как должны соотноситься скорости v_1 и v_2 наполнения бочек, то есть массы воды, поступающие в единицу времени в каждую бочку, чтобы система оставалась в равновесии?

Ответ: Скорости v_1 и v_2 наполнения бочек должны удовлетворять условиям $\frac{1}{2} < \frac{v_2}{v_1} < 1$.

Задача 4

В известном мультфильме про Винни-Пуха есть явное несоответствие: Винни-Пух надувает воздушный шарик обычным воздухом и взлетает на нём. Для того, чтобы воздушный шарик поднимался (а тем более поднимал Винни-Пуха), нужно, чтобы он был наполнен лёгким газом, плотность которого меньше плотности окружающего воздуха. Можно предположить, что Винни-Пух надувает шарик тёплым воздухом, плотность которого, как известно, меньше плотности холодного. Рассчитайте, каким должен быть в этом случае минимальный необходимый для подъёма объём шарика, если плотность тёплого воздуха внутри $\rho_1 = 1,13 \text{ кг/м}^3$, плотность холодного воздуха снаружи $\rho_2 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, а масса Винни-Пуха $m = 5 \text{ кг}$.

Ответ: $V = \frac{m}{\rho_2 - \rho_1} = 31,25 \text{ м}^3$.