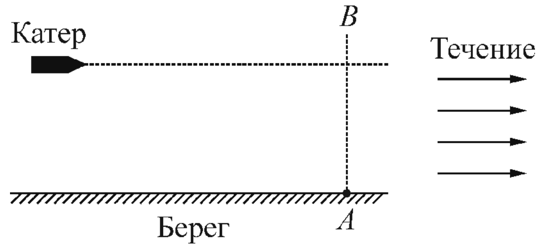
Возможные решения задач и критерии оценок

Авторы задач: Г.Н. Гайдуков, И.Н. Горбатый, М.Ю. Ромашка

На первом туре участникам олимпиады по 11 классу предложено пять задач, каждая из которых оценивается из 5 баллов (всего можно набрать до 25 баллов). Всякое полностью правильное и обоснованное решение задачи оценивается в 5 баллов, при частично правильном решении применяются приводимые ниже критерии оценок.

Задача 1. Вдоль направления течения прямой реки по спокойной воде плывёт маленький катер, траектория которого параллельна берегу и лежит на расстоянии L от него. Скорость течения реки равна V. Стоящий на берегу в точке A наблюдатель увидел, что первая волна от катера достигла точки A спустя время t после того, как катер пересёк прямую AB, перпендикулярную берегу (см. рис.). После этого волны ударяли о берег в этом месте с периодом T. Расстояние между соседними гребнями волн равно λ. Найдите скорость катера относительно воды, считая, что волны, возбуждаемые катером на поверхности воды, близки к гармоническим.



Возможное решение. Пусть v – скорость катера относительно стоячей воды, u – скорость распространения волн относительно поверхности стоячей воды. Запишем формулу для скорости волн, учитывая, что они близки к гармоническим:

$$u = \lambda / T_0, \tag{1}$$

где – период волн в системе отсчёта, связанной с водой.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с катером (см. рис. 1):

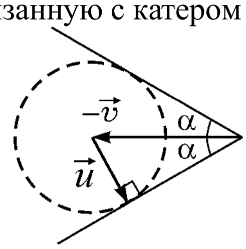


Рис. 1.

В этой системе отсчета вода движется относительно катера со скоростью $-v$, а волны распространяются относительно воды из каждой точки, в которой находился катер, во всех направлениях со скоростью, по модулю равной u (иначе говоря, гребни волн, испущенных в некоторый момент, в следующие моменты времени находятся на одинаковом расстоянии от точки испускания, которая движется со скоростью v). Из закона сложения скоростей следует, что относительно катера волны распространяются только внутри угла 2α, изображённого на рис. 1 (это так называемый «конуса Маха»; в трёхмерном случае волны распространяются внутри конуса). Относительно берега реки «конус Маха» как единое целое движется со скоростью , и поэтому гребни волн образуют с берегом тот же угол α, что изображён на рис. 1. Из условия задачи следует, что $u < v$ (иначе волны обгоняли бы катер, и первая волна пришла бы в точку A до того, как катер пересек линию AB).

Рассмотрим рис. 2, на котором показан гребень волны AD и набор параллельных ему гребней следующих волн.

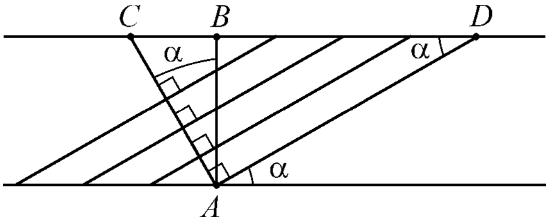


Рис. 2.

В точку A дошла волна, испущенная из точки C, а катер за это время прошёл отрезок CD. Из рис. 1 и рис. 2 следуют уравнения:

$$\sin\alpha = \frac{u}{v}, \tag{2}$$

$$L = BD \cdot \mathrm{tg}\alpha = (v + V)t \cdot \mathrm{tg}\alpha. \tag{3}$$

Свяжем величины и T (то есть фактически учтем эффект Доплера) – см. рис 3. Если волны распространяются в стоячей воде, то скорость движения вдоль берега точки E (это точка пересечения линии гребня волны с берегом) равна $u_1 = \dfrac{u}{\sin\alpha}$. Отрезок $AE = \dfrac{\lambda}{\sin\alpha}$. Поэтому $\dfrac{u}{\sin\alpha} = \dfrac{\lambda}{T_0 \sin\alpha}$. Если же волны распространяются в воде, которая течет со скоростью V, то эту скорость течения нужно добавить к скорости u_1, и учесть, что изменится период волн. При этом получится следующее соотношение: $\dfrac{u}{\sin\alpha} + V = \dfrac{\lambda}{T\sin\alpha}$, где T – заданный в условии задачи период волн, наблюдаемых в системе отсчета, связанной с берегом.

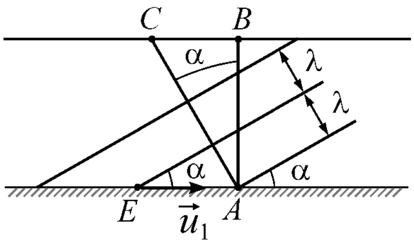


Рис. 3.

Отсюда

$$u = \frac{\lambda}{T} - V\sin\alpha. \tag{4}$$

Из уравнений (2) и (4) получаем:

$$v + V = \frac{\lambda}{T\sin\alpha}. \tag{5}$$

Из уравнений (3) и (5):

$$v + V = \frac{L}{t \cdot \mathrm{tg}\alpha} = \frac{\lambda}{T\sin\alpha}.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{\lambda t}{LT}$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda t}{LT}\right)^2}$. С учетом этого, из (5) окончательно находим:

$$v = \frac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}} - V.$$

Отметим, что, поскольку $u < v$, то $V < \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}}$, то есть $v > 0$.

Ответ: скорость катера относительно воды равна $v = \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}} - V$.

Критерии оценок

Замечено, что в системе отсчета катера волны распространяются внутри «конуса Маха» и записано соотношение между скоростью v катера относительно воды, скоростью волн u относительно воды и углом α полураствора конуса Маха – 1 балл

Записана связь между L, v, V, t и α – 1 балл

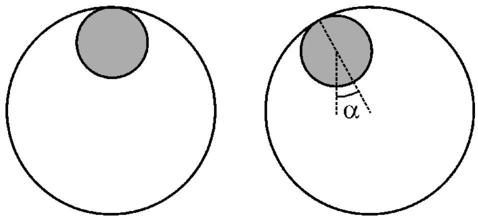
Учтен эффект Доплера (то есть получена связь между u, λ, T, V и α) – 1 балл

Получено выражение для угла α (через величины, заданные в условии задачи) – 1 балл

Получен правильный ответ – 1 балл

Всего: 5 баллов.

Задача 2. Цилиндрическое бревно радиусом r, ось которого горизонтальна, неподвижно закреплено. На бревно надет тонкий однородный обруч массой m и радиусом R так, как показано на рисунке слева. Обруч вывели из положения равновесия, отклонив его в плоскости рисунка так, что прямая, соединяющая центр обруча и точку касания обруча с бревном, образовала угол α с вертикалью (см. рис. справа), и отпустили. В процессе возникших после этого колебаний обруч движется по бревну без проскальзывания.



1) Найдите скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия.

2) Найдите модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия.

Возможное решение. Заметим, что центр масс обруча движется по окружности радиусом $R - r$. Пусть скорость центра масс обруча при прохождении обручем положения равновесия равна v. Скорость верхней точки обруча в этот момент равна нулю, поскольку обруч движется по бревну без проскальзывания. Таким образом, через верхнюю точку обруча проходит мгновенная ось вращения. Отсюда легко найти, что скорость нижней точки равна $V = 2v$. Движение обруча в этот момент можно представить как движение центра масс со скоростью v и вращение всех точек обруча в системе отсчета центра масс также со скоростью v. Кинетическая энергия обруча при таком движении равна $E_к = mv^2$. (Действительно, можно представить, что обруч сначала разогнали поступательно до скорости v, совершив при этом работу $mv^2/2$, а потом в системе отсчета центра масс раскрутили его, разогнав обод до скорости v, и совершив при этом работу, также равную $mv^2/2$. Суммарная работа в итоге будет равна $E_к = mv^2$).

При переходе обруча из исходного отклоненного положения в нижнее положение его центр масс опустится на величину

$$h = (R - r)(1 - \cos\alpha).$$

Приравнивая начальную потенциальную энергию обруча его конечной кинетической энергии, получаем:

$$mv^2 = mgh.$$

С учетом выражения для h имеем:

$$v^2 = g(R-r)(1-\cos\alpha),\ \text{и}\ v = \sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}\,.$$

Следовательно, искомая скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия равна $V = 2v = 2\sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}$.

Для ответа на второй вопрос задачи запишем уравнение движения центра масс для момента прохождения им нижней точки траектории в процессе движения по окружности радиусом $R-r$. Центр масс имеет при этом центростремительное ускорение, и

$$ma_{\text{цс}} = \frac{mv^2}{R-r} = mg(1-\cos\alpha) = N - mg\,,$$

где N – сила, с которой бревно действует на обруч. В соответствии с третьим законом Ньютона, обруч давит на бревно с такой же по модулю силой. Поэтому

$$N = mg(2-\cos\alpha)\,.$$

Ответ: 1) скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия равна $V = 2\sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}$

2) модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия, равен $N = mg(2-\cos\alpha)$.

Критерии оценок

Записано выражение для кинетической энергии обруча при движении его центра масс со скоростью v – 1 балл

Записан закон сохранения механической энергии для процесса перехода обруча из начального положения в положение равновесия – 1 балл

Найдена скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия – 1 балл

Записано уравнение движения центра масс обруча для момента прохождения им положения равновесия – 1 балл

Найден модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия – 1 балл

Всего: 5 баллов.

Задача 3. Туристы развели костёр и поставили кипятиться воду в котелке с плоским дном и вертикальными стенками. Когда вода закипела, котелок не сняли с костра, и спустя время $\tau = 8$ мин после начала кипения уровень воды в котелке уменьшился на $h = 2{,}5$ см. В этот момент начался дождь, но туристы продолжали поддерживать костёр, поскольку группа людей с продуктами задержалась. В каждом кубометре воздуха находится $n = 200$ дождевых капель, которые падают вертикально с постоянной скоростью $v = 9$ м/с. Температура каждой капли равна $t_0 = 20$ °C, а ее масса равна $m_0 = 50$ мг.

1) Будет ли вода в котелке продолжать кипеть после начала дождя? Ответ обоснуйте.

2) Как и за какое время после начала дождя уровень воды в котелке изменится еще на $H = 1$ см?

Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг °C), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2\cdot 10^6$ Дж/кг. Считайте, что подводимая к воде в котелке тепловая мощность всё время поддерживается постоянной.

Возможное решение. Пусть P – тепловая мощность, подводимая к воде в котелке от костра, S – площадь дна котелка. Вычислим величину P/S, то есть тепловую мощность, отнесённую к единице площади. Масса воды, которая испарилась из котелка за время τ, равна $m = \rho Sh$.

Количество теплоты, подведённое к воде за это время, равно $P\tau = mr$. Поделив количество теплоты на время, получим мощность: $P = \frac{rm}{\tau} = \frac{r\rho Sh}{\tau}$. Отсюда $\frac{P}{S} = \frac{r\rho h}{\tau} \approx 1{,}15\cdot 10^5$ Вт/м^2.

Теперь выясним, будет ли вода продолжать кипеть после начала дождя, или кипение прекратится. Масса дождевой воды, попадающей в котелок за некоторое время *t*, равна $M_{\text{дожд}} = Nm_0 = nSvtm_0$, где N – число капель, попадающих в котелок за рассматриваемое время.

Количество теплоты, необходимое для приведения этой воды в состояние кипения, равно

$$Q_1 = cM_{\text{дожд}}(100 - t_0) = cm_0 nSvt(100 - t_0).$$

Разделив обе части последнего уравнения на произведение *St*, получим тепловую мощность, приходящуюся на единицу площади, необходимую для того, чтобы попавшая в котелок дождевая вода закипала:

$$\frac{P_1}{S} = cm_0 nv(100 - t_0) \approx 3\cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2.$$

Видно, что $\frac{P}{S} > \frac{P_1}{S}$. Это означает, что вода в котелке будет продолжать кипеть и после начала дождя.

Вычислим массу воды, которая будет испаряться за некоторое время *t*:

$$M_{\text{исп}}(t) = \frac{(P - P_1)t}{r}.$$

Полное изменение массы воды в котелке за время *t* от начала дождя равно разности масс воды, попавшей в котелок, и испарившейся из него:

$$\Delta M(t) = M_{\text{дожд}}(t) - M_{\text{исп}}(t) = m_0 nSvt - \frac{(P - P_1)t}{r}.$$

Изменение уровня воды в котелке за время *t* от начала дождя равно

$$x(t) = \frac{\Delta M(t)}{\rho S} = \left(\frac{m_0 nv}{\rho} - \frac{P - P_1}{\rho S r}\right)t = kt,$$

где $k \approx 5{,}14\cdot 10^{-5}$ м/с – величина в круглых скобках в последнем выражении. Положительный знак коэффициента *k* означает, что уровень воды в котелке будет увеличиваться. Поэтому время *T*, за которое уровень воды увеличится на *H*, равно:

$$T = \frac{H}{k} \approx \frac{10^{-2}}{5{,}14\cdot 10^{-5}} \approx 195 \text{ с}.$$

Ответ: 1) Вода в котелке будет продолжать кипеть после начала дождя.

2) Уровень воды в котелке будет увеличиваться, и вырастет на *H* = 1 см за время $T \approx 195$ с.

Критерии оценок

Найдена тепловая мощность, отнесённая к единице площади котелка, поступающая от костра к воде – 1 балл

Записано уравнение теплового баланса для дождевой воды, попадающей в котелок – 1 балл

Показано, что вода в котелке будет продолжать кипеть и после начала дождя – 1 балл

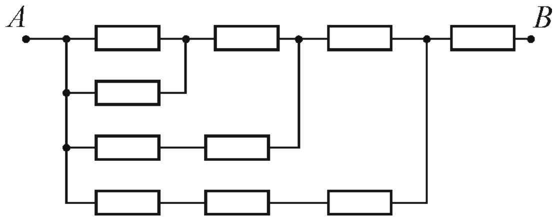
Записано выражение для полного изменения массы воды в котелке за время *t* от начала дождя – 1 балл

Получена формула для изменения уровня воды в котелке за время *t* от начала дождя – 0,5 балла

Сделан вывод о том, что уровень воды в котелке будет увеличиваться, и найдено, за какое время он вырастет на 1 см – 0,5 балла

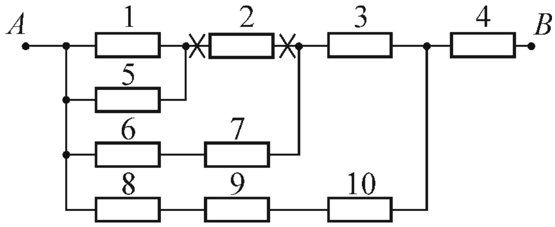
Всего: 5 баллов.

Задача 4. Участок *AB* электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно R_1 = 219 Ом. После того, как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка *AB* стало равным R_2 = 255 Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.



Решение

Рассмотрим участок *AB* электричкой цепи. Заметим, что он состоит из набора последовательно и параллельно соединённых звеньев.



Пронумеруем резисторы слева направо, начиная с верхнего ряда, так, как показано на рисунке. Обозначим сопротивление каждого из резисторов, из которых состоит участок цепи, через *R*, и выразим общее сопротивление через *R*. Будем двигаться вдоль участка цепи слева направо.

Резисторы №1 и №5 соединены параллельно, их общее сопротивление равно $R/2$. Затем последовательно к ним подсоединен резистор №2, что дает общее сопротивление $3R/2$. Далее к ним параллельно подключены два последовательно соединенных резистора № 6 и №7, с их учетом сопротивление равно $\frac{(3R/2)\cdot 2R}{(3R/2)+2R}=\frac{6R}{7}$. Добавляя последовательно соединенный резистор №3, получим сопротивление $13R/7$. Далее параллельно к полученному участку параллельно подсоединяются три последовательно включенных резистора №8, №9 и №10, что дает сопротивление $\frac{(13R/7)\cdot 3R}{(13R/7)+3R}=\frac{39R}{34}$. Наконец, путем последовательного подключения резистора №4, получим сопротивление всего участка цепи,: $R_{AB}=\frac{39R}{34}+R=\frac{73R}{34}=R_1$ (согласно условию, оно равно R_1 = 219 Ом). Отсюда R = 102 Ом.

Вычислим отношение $\frac{R_2}{R}=\frac{255}{102}=\frac{5}{2}$. Заметим, что резистор №4 добавляет к общему сопротивлению участка *AB* сопротивление *R*. Если этот резистор мысленно удалить, то сопротивление оставшегося участка цепи будет превышать *R* в $\frac{R_2-R}{R}=\frac{3}{2}$ раз. Следовательно, участок цепи, который остается после мысленного удаления резистора №4, после перерезания одного провода может состоять, например, из двух параллельно соединенных ветвей, каждая из которых содержит три последовательно включенных резистора. Обратим внимание на параллельные ветви цепи с резисторами №6, №7, №3 и №8, №9, №10. Сопротивление этих двух ветвей без резисторов №1, №2 и №5 равно как раз ($3R/2$).

Таким образом, для удовлетворения условию задачи нужно исключить резисторы №1, №2 и №5 путем перерезания одного провода. Следовательно, Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).

Ответ: Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).

Критерии

Общее сопротивление участка цепи R_1 выражено через сопротивление одного резистора R – 1,5 балла

Найдено сопротивление резистора $R = 102$ Ом – 0,5 балла

Найдено отношение $R_2/R = 5/2$ – 1 балл

Замечено, что при удалении самого правого резистора сопротивление оставшегося участка цепи станет равно $3R/2$ – 0,5 балла

Указано, в каких точках надо разрезать провод для того, чтобы сопротивление оставшегося участка цепи стало равным $3R/2$ – 1,5 балла (если указана только одна точка, то снимается 0,5 балла)

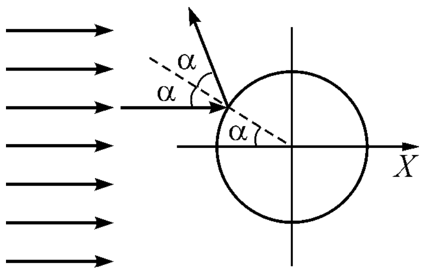
Всего: 5 баллов.

Задача 5. Шар радиусом R с зеркальной поверхностью освещают широким параллельным пучком света. Какую часть шара, и каким образом нужно покрасить черной краской, чтобы сила светового давления на шар оказалась максимальной?

Возможное решение. Рассматривая свет, как поток частиц (фотонов), запишем для силы светового давления на шар:

$$\vec{F} = -\frac{\Delta P}{\Delta t},$$

где ΔP – изменение импульса фотонов за время Δt в результате их отражения или поглощения поверхностью шара.



При зеркальном отражении фотона, падающего на шар под углом падения α (см. рис.), проекция его импульса на ось X (которая совпадает с направлением падающего пучка) изменяется на величину:

$$\Delta p_x = -p\cos(2\alpha) - p,$$

где p – импульс фотона в падающем пучке. Если же фотон поглощается поверхностью шара, то изменение его импульса равно

$$\Delta p_x = -p.$$

Сравнивая эти два случая, видим, что при $\alpha < \pi/4$ изменение проекции импульса $|\Delta p_x|$ больше при зеркальном отражении, а при $\alpha > \pi/4$ сильнее изменяется проекция импульса при поглощении фотона. Поэтому для получения максимальной силы давления фотоны, падающие под углами $\alpha < \pi/4$, «выгоднее» отразить, а фотоны с б***о***льшими углами падения – поглотить.

Действительно, пусть передняя поверхность шара в пределах углов падения от 0 до $\alpha_0 = \pi/4$ зеркальная, а остальная поверхность закрашена. Мысленно увеличим граничный угол α_0 на малую величину $\Delta\alpha$, сдвинув границу окрашивания. В результате этого узкая полоска поверхности шара «превратится» из окрашенной в зеркальную. Пусть на эту полоску в единицу времени падает N фотонов. Тогда из-за сдвига границы проекция на ось X импульса, передаваемого шару отраженными фотонами, возрастет на

$$(\delta p_x)_{\text{отр}} = N[p + p\cos(2(\alpha_0 + \Delta\alpha))] = N\left[p + p\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\Delta\alpha\right)\right] = N[p - p\sin(2\Delta\alpha)],$$

а проекция на ось X импульса, передаваемого шару поглощенными фотонами, уменьшится на $(\delta p_x)_{\text{погл}} = Np$. Итоговое изменение проекция на ось X импульса, передаваемого шару фотонами, изменится на $\delta p_x = (\delta p_x)_{\text{отр}} - (\delta p_x)_{\text{погл}} = -Np\sin(2\Delta\alpha)$, то есть уменьшится. Значит, уменьшится и сила светового давления на шар. Если же мысленно уменьшить граничный угол α_0 на малую величину $\Delta\alpha$, сдвинув границу окрашивания в другую сторону, то проекция на ось X импульса, передаваемого шару поглощенными фотонами, увеличится на $(\delta p_x)_{\text{погл}} = Np$, а проекция на ось X импульса, передаваемого шару отраженными фотонами, уменьшится на

$$(\delta p_x)_{\text{отр}} = N[p + p\cos(2(\alpha_0 - \Delta\alpha))] = N\left[p + p\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\Delta\alpha\right)\right] = N[p + p\sin(2\Delta\alpha)].$$

Итоговое изменение проекция на ось X импульса, передаваемого шару фотонами, изменится на $\delta p_x = (\delta p_x)_{\text{погл}} - (\delta p_x)_{\text{отр}} = -Np\sin(2\Delta\alpha)$, то есть опять уменьшится. Значит, и в этом случае сила светового давления на шар уменьшится. Таким образом, сила светового давления при $\alpha = \alpha_0 = \pi/4$ действительно является максимальной.

Итак, заднюю (теневую) поверхность шара можно «красить» как угодно, это не влияет на силу давления, а освещенную поверхность следует оставить зеркальной в пределах центрального шарового сегмента высотой

$$h = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}3R.$$

Ответ: зеркальной следует оставить поверхность шара в пределах центрального шарового сегмента высотой $h = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}3R$; остальную часть шара, на которую попадает свет, нужно покрасить черной краской.

Критерии оценок

Записано выражение для изменения проекции импульса фотона на направление падения света при зеркальном отражении фотона – 1 балл

Записано выражение для изменения проекции импульса фотона на направление падения света при поглощении фотона – 1 балл

Указано (даже без доказательства), что выгоднее всего фотоны, падающие под углами $\alpha < \pi/4$, отразить, а фотоны с б***о***льшими углами падения – поглотить – 1 балл

Обосновано (любым способом – рассуждениями или вычислениями), что граница между зеркальной и закрашенной частями шара должна проходить по углу падения $\pi/4$ – 1 балл

Указано, какую часть шара, и каким образом нужно закрасить для того, чтобы сила светового давления на шар оказалась максимальной – 1 балл

Всего: 5 баллов.