

Задача 1

Горизонтальный канал соединяет две судоходные реки А и Б. Иногда в нем возникает слабое течение, которое может быть направлено либо в одну, либо в другую сторону. От одной реки к другой по каналу курсирует катер, скорость которого относительно воды постоянна. Капитан катера заметил, что за много лет ему никогда не удавалось совершить рейс туда и обратно быстрее, чем за $t_1 = 2$ часа, а самый неудачный рейс длился $t_2 = 3$ часа (время разворота катера и остановок не учитывается). Однажды мотор катера сломался, но из-за стечения обстоятельств рейс от А к Б и обратно все-таки был выполнен. Какое минимальное время для этого могло понадобиться катеру?

После ремонта катер стал развивать в два раза большую скорость относительно воды. Как долго теперь может длиться рейс туда и обратно?

Ответ: катер со сломанным мотором мог совершить рейс за минимальное время $T_{\min} = 6t_1 = 12$ часов; после ремонта мотора рейс катера может длиться от $t_{\min} = \frac{6}{11}t_1 \cong 65$ мин до $t_{\max} = \frac{2}{3}t_1 = 80$ мин.

Критерии

Времена t_1 и t_2 выражены через расстояние s между А и Б, скорость v катера относительно воды и скорость u течения – 2 очка.

Найдена связь между v и u , а также между s , u и t_1 (или эквивалентная ей) – 2 очка (по одному за каждое соотношение).

Указано, что минимальное время рейса катера при испорченном моторе будет получаться в случае, если катер всё время плывет только за счет течения, и найдено это минимальное время – 2 очка.

Найдено минимальное время рейса после ремонта мотора – 2 очка.

Найдено максимальное время рейса после ремонта мотора – 2 очка.

ВСЕГО: 10 очков.

В случае, если есть ошибки в вычислениях – снимается 0,5 очка за каждую из трех неправильно вычисленных величин, которые требуется найти.

Задача 2

Семья Петровых ехала на машине из города в деревню. Весь путь занял у них 2,5 часа. Известно, что средняя скорость машины за первые 2 часа пути равна 60 км/ч, а средняя скорость за последние 2 часа пути равна 80 км/ч. Отец попросил сына, зная это, вычислить среднюю скорость машины на всём пути. Подумав, сын справедливо сказал, что для этого недостаточно данных, но можно вычислить наименьшее и наибольшее возможное значение средней скорости, зная, что семья никогда не нарушает правила дорожного движения, а машина едет только вперед. Согласно правилам, скорость машины везде на пути от города к деревне не должна превышать 90 км/ч. Найдите наименьшее и наибольшее возможное значение средней скорости машины Петровых.

Ответ: значения средней скорости машины может лежать в интервале от $v_{\text{ср.мин}} = 64$ км/ч до $v_{\text{ср.макс}} = 82$ км/ч.

Критерии

Записано уравнение, связывающее среднюю скорость на всём пути с длинами отрезков пути и временами их прохождения (весь путь разделить на всё время) – 1 очко.

Записаны выражения для средней скорости в первые и в последние 2 часа пути – 2 очка (по 1 очку за каждое уравнение).

Средняя скорость на всём пути выражена через расстояние S_2 , пройденное за время от 0,5 часа до 2 часов (считая с начала пути) – 2 очка.

Замечено, что путь S_2 не может быть равен нулю, поскольку в этом случае средняя скорость на всем пути больше максимально допустимой скорости 90 км/ч – 1 очко.

Найдено минимально возможное значение S_2 , равное 75 км – 1 очко.

Найдено максимально возможное значение средней скорости машины на всем пути (82 км/ч) – 1 очко.

Найдено максимально возможное значение S_2 , равное 120 км – 1 очко.

Найдено минимально возможное значение средней скорости машины на всем пути (64 км/ч) – 1 очко.

ВСЕГО: 10 очков.

Возможны другие способы проведения рассуждений, которые должны положительно оцениваться в случае их правильности.

Задача 3

В тексте одной из задач задачника Григория Остера «Ненаглядное пособие по математике» написано следующее:

«В специальный ящик можно уложить 68 куриных яиц. Если уминать их ногами, то поместится в 100 раз больше».

С точки зрения физики, это может показаться странным. Жидкости (в частности, белок и желток куриных яиц) трудно поддаются сжатию. Поэтому плотности белка и желтка практически невозможно изменить, уминая яйца ногами. То же самое справедливо и в отношении яичной скорлупы. Поэтому, если яйца в ящике лежат вплотную друг к другу, то объём содержимого ящика нельзя изменить в такое большое число (100) раз.

Однако, в задаче сказано, что ящик – специальный. Можно предположить, что в ящике были специальные перегородки, за счёт которых яйца укладывались не вплотную, а на некотором расстоянии друг от друга, и большую часть объёма ящика занимал воздух. Предположим, что эти перегородки были лёгкими и тонкими: масса и объём всех перегородок пренебрежимо мала по сравнению с массой и объёмом всех яиц. Будем считать также, что при уминании яиц ногами белок и желток не выплёскиваются из ящика. Известно, что средняя плотность одного куриного яйца равна 1060 кг/м^3 . Зная это, ответьте на следующие вопросы.

1. Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика с 68 куриными яйцами?

2. Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика, если в него положили только 40 яиц?

Ответ: 1) средняя плотность содержимого специального ящика с 68 куриными яйцами равна $\rho_1 = \frac{\rho_{\text{яйца}}}{100} = 10,6 \text{ кг/м}^3$, 2) средняя плотность содержимого специального ящика с 40

куриными яйцами равна $\rho_2 = \frac{\rho_{\text{яйца}}}{170} \approx 6,2 \text{ кг/м}^3$.

Критерии

Хотя бы один раз применена формула, связывающая массу, объём и среднюю плотность – 2 очка.

Замечено, что при уминании яиц ногами объём ящика не изменяется, а масса содержимого увеличивается в 100 раз – 2 очка.

Найдена средняя плотность содержимого специального ящика с 68 куриными яйцами – 2 очка.

Указано, что при уменьшении числа яиц от 68 до 40 масса содержимого ящика и средняя плотность пропорционально уменьшатся – 2 очка.

Найдена средняя плотность содержимого специального ящика с 40 куриными яйцами – 2 очка.

ВСЕГО: 10 очков.

В случае, если есть ошибки в вычислениях – снимается 1 очко за каждую из двух неправильно вычисленных величин, которые требуется найти.

Задача 4

Вася взвесил на очень точных электронных весах (которые «чувствуют» изменение массы 0,01 г) два чистых белых листа бумаги формата А4 (плотность бумаги 80 г/м², размеры листа 297 мм × 210 мм). Массы листов были совершенно одинаковыми. На одном из листов на двух его сторонах Вася напечатал на принтере текст, в котором было 6500 символов. После взвешивания листа с текстом оказалось, что его масса увеличилась на 1,6%. Сколько в среднем весит один символ?

Ответ: один символ весит в среднем $\approx 12,3$ мкг.

Критерии

Найдена площадь листа бумаги – 2 очка.

Найдена масса листа бумаги – 3 очка.

Найдена масса 6500 символов – 3 очка.

Найдена средняя масса одного символа – 2 очка.

ВСЕГО: 10 очков.

В случае, если есть ошибки в вычислениях – снимается 0,5 очка за каждую из четырех неправильно вычисленных величин, которые ищутся в ходе решения.