

**МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО РОБОТОТЕХНИКЕ 2016–2017 уч. г.
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР**

9–11 классы

1. (10 баллов) Для соревнований роботов подготовили следующую траекторию (рисунок 1). Задача робота состоит в том, чтобы каждый отрезок траектории проехать ровно один раз. Определите, сможет ли робот выполнить поставленную перед ним задачу. Свой ответ обоснуйте. Если робот сможет выполнить задание, то укажите возможные точки для старта.

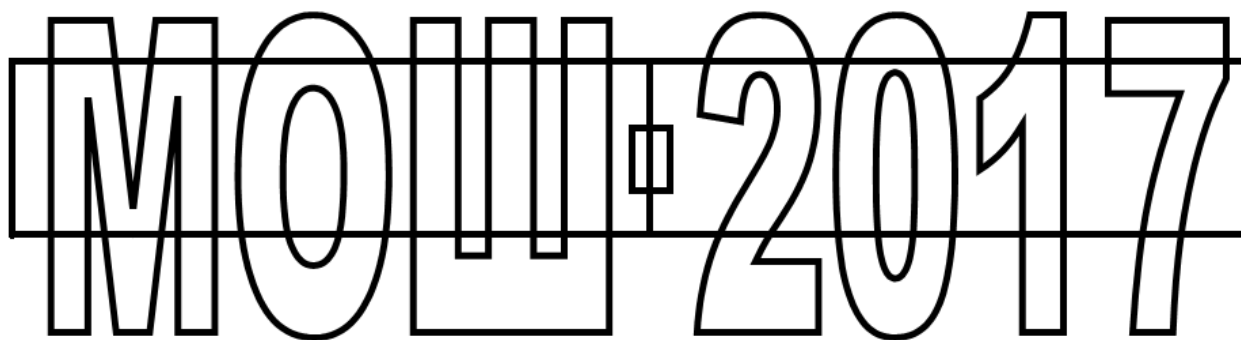


Рисунок 1.

Ответ: данную траекторию можно обойти с одного с одного раза, если стартовать в точках А или В.

Решение:

Будем называть для удобства точки, где пересекаются линии или линии меняют направление, вершинами.

Количество отрезков, выходящих из вершины, будем называть индексом вершины.

Согласно теореме Эйлера, для того, чтобы было возможно обойти всю фигуру по одному разу, необходимо, чтобы у данной фигуры число вершин с нечетным индексом было равно нулю или двум.

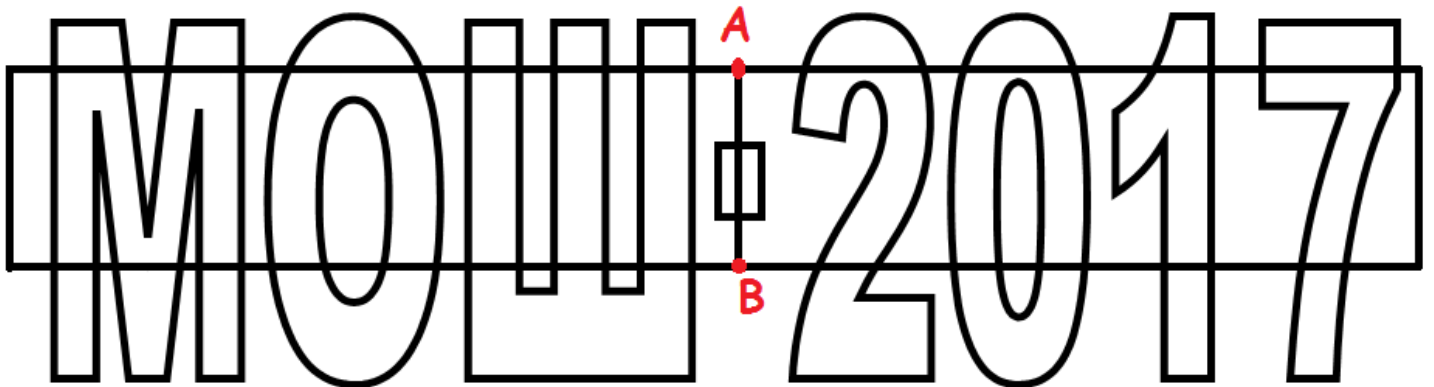
При этом если в фигуре нет вершин с нечетным индексом, то обходить фигуру можно с любой вершины, при этом старт и финиш совпадут.

Если в фигуре две вершины с нечетным индексом, то начать обход фигуры следует начать с одной из них, при этом вторая будет точкой финиша.

Если количество вершин с нечетным индексом отличается от 0 и 2, то объехать всю фигуру по одному разу не удастся.

Как мы видим из рисунка, все вершины, кроме двух отмеченных точек А и В, имеют четные индексы.

Значит, стартовать робот должен именно в них.



Ответ: данную траекторию можно обойти с одного с одного раза, если стартовать в точках А или В.

2. (15 баллов) На столе на опоре в точке O симметрично установлена длинная невесомая балка, балансирующая относительно своего центра. Рядом с балкой установлены две горизонтальные платформы B и E , закрепленные над столом на разной высоте (рисунок 2).

В точках A и B находятся роботы, массы которых равны $M_1 = 5$ кг и $M_2 = 4,5$ кг соответственно. В точках B и C находятся два груза с массами $m_1 = 0,4$ кг и $m_2 = 0,8$ кг соответственно. Длина балки равна $L = 1$ м.

Если балка находится в равновесии, то один из ее концов соприкасается без трения с платформой E . Если балка наклоняется до упора в сторону точки A , то ее противоположный конец без трения касается платформы B .

Роботы могут передвигаться по балке, а также размещать на ней грузы в любых точках.

В момент старта балка, роботы и грузы расположены так, как показано на рисунке 2.

Напишите алгоритм, с помощью которого роботы соберут и переместят грузы из точек B и C на платформу E .

Для простоты считайте роботов и грузы точечными.

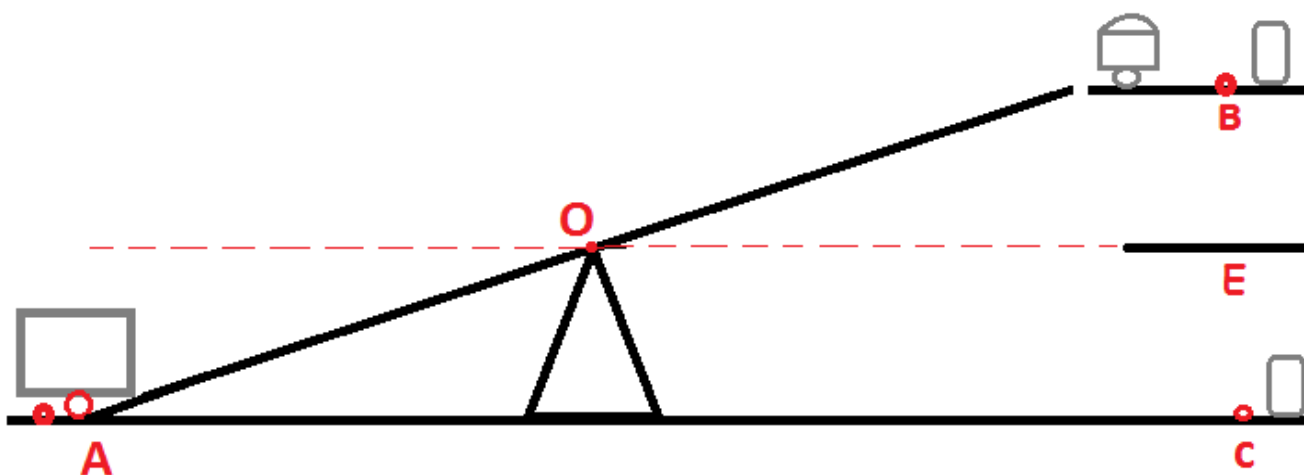


Рисунок 2.

Решение:

Так как платформа, на которую следует переместить оба груза находится в плоскости равновесия балки, то чтобы этого добиться, необходимо уравновесить балку так, чтобы робот с грузом находился в на одном уровне с платформой E и мог поставить груз на платформу.

Так как $M_2 + m_2 > M_1$, то для приведения балки в равновесие потребуется использование и груза m_1 .

Так как длина балки L , то максимальное плечо будет равно $L/2 = 1/2 = 0,5$ м.

Алгоритм решения задачи:

1. Робот M_2 берет груз m_1 , после чего переезжает с ним с платформы B на край балки. Так как $M_1 > M_2 + m_1$, то положение балки не изменится;
2. Робот M_2 перевозит груз m_1 в точку O ;
3. Робот M_1 переезжает в точку O . Балка устанавливается в равновесии;

4. Робот М1 берет груз m_1 ;
5. Робот М2 едет к краю балки в направлении точки С. Балка меняет свое положение, наклоняясь до упора в сторону точки С;
6. Робот М1 с грузом m_1 продвигается из точки О в сторону точки С (например, на 0,1 м), чтобы зафиксировать балку в данном положении;
7. Робот М2 съезжает с балки и берет груз m_2 ;
8. Робот М2 с грузом m_2 заезжает на край балки;
9. Робот М1 с грузом m_1 едет по балке в сторону точки А.

Рассчитаем расстояние x_1 , на котором от точки О на балке должен находиться робот М1 с грузом m_1 , чтобы уравновесить робота М2 с грузом m_2 на правом краю балки:

$$x_1(M_1+m_1) = L(M_2+m_2)/2$$

$$x_1 = (M_2+m_2)L / (2M_1+2m_1) = (4,5+0,8) / 2(5+0,4) = 5,3 : 10,8 = 53/108 \approx 0,49 \text{ м}$$

Робот М1 с грузом m_1 останавливается на расстоянии $x_1 = 53/108 \text{ м} \approx 0,49 \text{ м}$ от точки О. Балка приходит в равновесие;

10. Робот М2 заезжает на платформу Е и сгружает груз m_2 на платформу Е. Балка наклоняется до упора в сторону точки А;
11. Робот М1 с грузом m_1 переезжает к противоположному концу балки. Балка наклоняется до упора в сторону точки С;
12. Робот М1 оставляет груз m_1 на краю балки, после чего едет в сторону точки А. Чтобы балка пришла в равновесие, робот М1 должен остановиться на расстоянии от точки О:

$$x_2 * M_1 = m_1 * L / 2$$

$$x_2 = L * m_1 / 2M_1 = 0,4 / 10 = 0,04 \text{ м.}$$

Робот М1 проезжает от точки О в сторону точки А расстояние равное $x_2 = 0,04 \text{ м}$. Балка приходит в равновесие;

13. Робот М2 забирает груз m_1 с балки и сгружает его на платформу Е. Балка наклоняется до упора в сторону точки А;

3. (25 баллов) Робот AZ-13 преодолел трассу длиной 360 м, состоящую из 5 этапов. На каждом из этапов скорость робота была постоянна. Продолжительность первого, четвертого и пятого этапов одинаковая и больше 5 минут. Продолжительность второго и третьего этапов одинакова и больше 3 минут. Скорость робота AZ-13 на третьем и пятом этапах равная. Скорость робота на четвертом этапе в 2 раза меньше, чем на третьем этапе, и в 3 раза меньше, чем на первом этапе.

Средняя путевая скорость робота на отрезке, состоящем из второго и третьего этапов, равна средней путевой скорости робота на отрезке, состоящем из второго, третьего и четвертого этапов, а средняя путевая скорость робота на первых трех этапах равна средней путевой скорости прохождения двух последних этапов. Определите путь, пройденный роботом AZ-13 на первом этапе.

Ответ: робот AZ-13 на первом этапе преодолел путь, равный 120 метрам.

Решение:

Обозначим за A мин продолжительность первого, четвертого и пятого этапов, за B мин продолжительность второго и третьего этапов.

Обозначим для удобства за $2C$ м/мин скорость робота третьем и пятом этапах, тогда на четвертом этапе скорость будет равна C м/мин, а на первом этапе $3C$ м/мин. Скорость на 2 этапе обозначим за X м/мин.

Сделаем краткую запись условия, представив его в виде таблицы:

	1 этап	2 этап	3 этап	4 этап	5 этап
Скорость м/мин	$3C$	X	$2C$	C	$2C$
Время мин	A	B	B	A	A
Путь м	$3AC$	BX	$2BC$	AC	$2AC$

Так как средняя путевая скорость робота на отрезке, состоящем из второго и третьего этапов, равна средней путевой скорости робота на отрезке, состоящем из второго, третьего и четвертого этапов, то

$$\frac{BX + 2BC}{B + B} = \frac{BX + 2BC + AC}{B + B + A}$$

$$\frac{BX + 2BC}{2B} = \frac{BX + 2BC + AC}{2B + A}$$

Применим свойство пропорции:

$$(BX + 2BC)(2B + A) = 2B(BX + 2BC + AC)$$

$$2B(BX + 2BC) + A(BX + 2BC) = 2B(BX + 2BC) + 2BAC$$

$$ABX + 2ABC = 2ABC$$

$$ABX = 0$$

Мы знаем, что $A > 0$ и $B > 0$, тогда на них можно поделить и мы получим, что $X = 0$. Это означает, что робот во время второго этапа не двигался с места. Подставим найденное нами значение скорости на 2 этапе в таблицу:

	1 этап	2 этап	3 этап	4 этап	5 этап
Скорость м/мин	$3C$	0	$2C$	C	$2C$
Время мин	A	B	B	A	A
Путь м	$3AC$	0	$2BC$	AC	$2AC$

Так как средняя путевая скорость робота на первых трех этапах равна средней путевой скорости прохождения двух последних этапов, то

$$\frac{3AC + 0 + 2BC}{A + B + B} = \frac{AC + 2AC}{A + A}$$

$$\frac{3AC + 2BC}{A + 2B} = \frac{3AC}{2A}$$

Применим свойство пропорции:

$$2A(3AC + 2BC) = 3AC(A + 2B)$$

$$2AC(3A + 2B) = 3AC(A + 2B)$$

Разделив обе части уравнения на $AC > 0$, получим:

$$2(3A + 2B) = 3(A + 2B)$$

$$6A + 4B = 3A + 6B$$

$$3A = 2B$$

$$B = 1,5A$$

То есть, теперь наша таблица выглядит так:

	1 этап	2 этап	3 этап	4 этап	5 этап
Скорость м/мин	3С	0	2С	С	2С
Время мин	А	1,5А	1,5А	А	А
Путь м	3АС	0	3АС	АС	2АС

Мы знаем, что весь путь робота составляет 360 метров:

$$3АС + 0 + 3АС + АС + 2АС = 360$$

$$9АС = 360$$

$$АС = 40 \text{ м}$$

Так как нас просят найти путь, который робот преодолел на 1 этапе:

$$3АС = 3 \times 40 = 120 \text{ м}$$

Ответ: робот AZ-13 на первом этапе преодолел путь, равный 120 метрам.