МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО АСТРОНОМИИ. 2017–2018 уч. г.
ОЧНЫЙ ЭТАП
10–11 классы

Решения и критерии оценивания

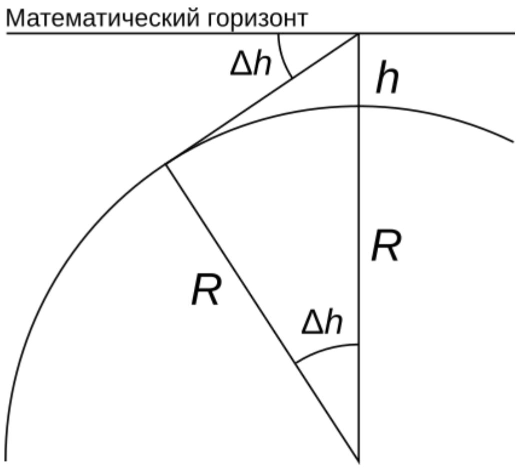
Задача 1

Матрос, находящийся на палубе корабля, расположенной на высоте 4 м над уровнем моря, видит звезду точно на горизонте. На какой высоте над / под видимым горизонтом видит эту же звезду матрос, стоящий на площадке, закреплённой на мачте на высоте 25 м над уровнем моря? Считать, что рост человека 2 метра. Рефракцией пренебречь.

Решение

Для любого реального наблюдателя конечного роста видимый горизонт, если он не закрыт близкими объектами, находится ниже математического. Пусть R – радиус Земли, а H – высота (глаз) наблюдателя. Тогда понижение горизонта Δh равно

$$\Delta h = \arccos\left(\frac{R}{R+H}\right).$$



Глаза матроса, стоящего на палубе, находятся на высоте 6 м над уровнем моря. Это приводит к тому, что видимый горизонт для этого матроса находится на 4.7′ ниже математического. Ровно на столько звезда находится ниже математического горизонта. Аналогично, понижение горизонта для наблюдателя на мачте составит 10′. Отсюда получаем, что звезда для наблюдателя на мачте оказывается на высоте 5.3′ над видимым горизонтом.

Рекомендации для жюри

Вывод (или запись без вывода) формулы для понижения горизонта – **1 балл**. Вычисление понижения горизонта для матроса на мачте – **1 балл**. Учёт того, что для матроса на палубе тоже есть понижение горизонта – **2 балла**. При проверке следует принять во внимание, что в пределе малых углов понижение горизонта пропорционально корню высоты наблюдателя ($\Delta h \sim \sqrt{H}$), а не самой высоте.

Максимальная оценка **– 4 балла.**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

Вечером 1 июля корабль подошёл к линии перемены дат и пересёк её ровно в 23 часа (по времени того пояса, в котором он был до этого момента). Какое число и время нужно установить на корабле?

Решение

Линия перемены дат проходит по долготе 180°, т. е. по середине часового пояса. В ряде мест это утверждение не соответствует действительности, но в исходной концепции часовых поясов этот так. При перемещении через линию перемены дат с запада на восток требуется вычесть 1 сутки из текущей даты, а при перемещении с востока на запад – прибавить. Поэтому, в первом случае, дата и время будут 30 июня, а во втором – 2 июля. При этом, корабль путешествует в пределах одного пояса и время переводить не надо.

Рекомендации для жюри

Утверждение, что дату требуется изменить на 1 день, на 30 июня или на 2 июля оценивается в **1 балл**. Если рассмотрены оба варианта, но перепутаны случаи движения с запада на восток или с востока на запад, выставляется **2 балла**. Полностью правильный ответ на вопрос про дату оценивается в 3 балла. Указание на то, что время менять не надо оценивается в **1 балл**.

Максимальная оценка **– 4 балла.**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 3

15 января 2016 г. на Земле можно было наблюдать прохождение МКС по диску Сатурна. Оцените длительность этого явления и ширину полосы, в которой можно было наблюдать его, при условии, что Сатурн находился в этот момент близи зенита. Характерный размер МКС – 50 м. Высота орбиты около 400 км.

Решение

В условии требуется оценить (найти приближённо) длительность затмения. Вследствие осевого вращения Земли скорость точки на её экваторе составляет около 0.5 км/с, в то время как МКС движется примерно с 1-ой космической скоростью, которая у поверхности Земли составляет около 8 км/с. Поэтому пренебрежём осевым вращением Земли. Также будем считать, что Сатурн находится в противостоянии (относительное положение Сатурна влияет на ответ незначительно – в соединении с Солнцем его угловые размеры будут лишь на ~20% меньше). Тогда его угловой диаметр будет равен

$$d=\frac{2R_s}{L}=\frac{2\cdot 60300}{8.5\cdot 1.5\times 10^8}\approx 9.5\times 10^{-5}\text{ рад}\approx 20''.$$

Положение МКС на небе влияет на ширину полосы и продолжительность гораздо сильнее – в зените расстояние до спутника минимально, а его угловая скорость максимальна; на высоте 30° над горизонтом станция становится примерно в 2 раза дальше, а её угловая скорость уменьшается за счёт изменения угла проекции на небесную сферу. Вблизи зенита мы можем пренебречь этим.

Итак, вычислим искомые величины для положения МКС в зените. Высота орбиты станции примерно равна 400 км. На этой высоте можно считать, что скорость движения станции равна 1-ой космической скорости для Земли, если точнее, то

$$V=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}=7.7\text{ км/с}.$$

Угловая скорость при такой высоте орбиты будет равна

$$\omega=\frac{V}{h}\approx 0.02\text{ рад/с}\approx 4000''/\text{с}.$$

Находясь в зените, МКС также будет иметь заметный угловой размер. Размер станции примерно 50 м, что даёт угловой размер $\delta \approx 26''$. Впрочем, видимый угловой размер будет зависеть от ориентации станции. Продолжительность пролёта МКС по диаметру видимого диска Сатурна будет равна

$$t=\frac{d+\delta}{\omega}\approx 0.01\text{ с}.$$

Ширина полосы на поверхности Земли, из которой будет виден пролёт МКС по видимому диску Сатурна, определяется размером поверхности, видимой в момент прохождения с МКС под углом $d + \delta$, т. е.

$$l=h\cdot(d+\delta)\approx 4\times 10^5\cdot 9.5\times 10^{-5}\approx 90\text{ м}.$$

Рекомендации для жюри

Вычисление углового размера Сатурна оценивается в **1 балл**, МКС – ещё в **1 балл**. Вычисление полосы покрытия – **2 балла** (**1 балл** за формулу и **1 балл** за правильное итоговое значение). Вычисление круговой скорости оценивается в **1 балл**. Допустимо использование её известной примерной величины 8 км/с. За определение видимой угловой скорости выставляется ещё **1 балл**. Если угловая скорость вычисляется сразу, минуя линейную, то она оценивается из **2 баллов**. Вычисление времени покрытия **2 балла** (**1 балл** за формулу и **1 балл** за правильное итоговое значение). Если в решении задачи МКС принимается за точку и величина δ не используется, то не выставляются баллы за её определение и конечные ответы, т.е. задача оценивается из **5 баллов**.

Максимальная оценка **– 8 баллов.**

(А. М. Татарников)

Задача 4

В радиоастрономии для измерения спектральной плотности потока излучения широко применима единица янский. 1 Ян = 10^{-26} Вт м$^{-2}$ Гц$^{-1}$. Определите в янских плотность потока энергии от звезды 0-й звёздной величины на длине волны 550 нм. Известно, что от звезды 0^m до наблюдателя доходит 10^4 квантов·см$^{-2}$·с$^{-1}$·нм$^{-1}$. От звезды какой звёздной величины плотность потока излучения будет 1 Ян?

Решение

Длина волны 550 нм соответствует частоте

$$\nu = c/\lambda = 5.5\times10^{14} \text{ Гц}.$$

Энергия кванта с такой длиной волны (частотой) будет

$$\varepsilon = hc/\lambda = 3.6\times10^{-19} \text{ Дж}.$$

Значит, плотность потока энергии от звезды составит

$$S_\lambda = 3.6\times10^{-19} \text{ Дж} \cdot 10^4(\text{см}^2 \text{ с нм})^{-1} = 3.6\times10^{-11} \text{ Вт/(м}^2 \text{ нм)}$$

Пересчитаем ширину полосы длин волн в ширину полосы частот:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = c/\lambda_1 - c/\lambda_2 \approx c\Delta\lambda/\lambda^2$$

Отсюда видно, что полоса в 1 нм на волне 550 нм соответствует полосе частот

$$\Delta\nu = 9.9\times10^{11} \text{ Гц} = 990 \text{ ГГц}$$

В таком случае, плотность потока энергии звезды 0-й звёздной величины равна

$$S_\nu = \frac{3.6\times10^{-11}}{9.9\times10^{11}} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\,\text{Гц}} = 3.6\times10^{-23} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\,\text{Гц}} \approx 3600 \text{ Ян}.$$

Это ответ на первый вопрос задачи. Чтобы ответить на второй вопрос, надо вспомнить формулу Погсона:

$$m - 0^m = 2.5 \cdot \lg\frac{3600}{1} = 8.9^m$$

Рекомендации для жюри

Для ответа на первый вопрос задачи требуется определить энергию, переносимую квантами (**1 балл**), и вычислить ширину полосы частот, которая соответствует данной длине волны (**3 балла**). Вычисление числа янских, соответствующих звезде 0-й звёздной величины, оценивается ещё в **2 балла**. Применение формулы Погсона и ответ на второй вопрос задачи оцениваются ещё в **2 балла** (**1 балл** за правильную запись формулы и **1 балл** за правильный числовой ответ).

Максимальная оценка **– 8 баллов.**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 5

Для наблюдения объекта на крупном телескопе было выделено две ночи: в первую ночь качество изображения (диаметр кружка рассеяния) составило 1.5″, прозрачность 0.2^m, а во вторую – 0.5″, прозрачность 0.3^m. Сравните время, требуемое для фотометрических измерений точечного объекта с заданным соотношением сигнал-шум. Внеатмосферный блеск объекта равен фону неба с 1″. Сам фон неба считать постоянным. Считать, что приёмник регистрирует всё приходящее излучение, а поглощения в оптической системе телескопа отсутствует.

Отношение сигнал/шум задаётся величиной $\epsilon=\frac{N_s}{\sqrt{N_s+2N_{bg}}}$, где N_s и N_{bg} – число квантов от источника и от фона соответственно, принятых приёмником.

Решение

Пусть β – качество изображения, D – диаметр телескопа, j_{bg} – яркость фона неба (число квантов, приходящих за единицу времени на единичную площадку из единичного телесного угла), f_s – блеск объекта (число квантов, приходящих за единицу времени на единичную площадку), t – время наблюдения, β – радиус кружка рассеяния. Тогда на приёмник от объекта будет приходить следующее количество квантов:

$$N_s=\frac{\pi D^2}{4}f_s t,$$

а от фона:

$$N_{bg}=\frac{\pi D^2}{4}\pi\beta^2 j_{bg}t.$$

Подставляя эти значения в формулу для отношения сигнал/шум, получаем

$$\epsilon=\frac{\frac{\pi D^2}{4}f_s t}{\sqrt{\frac{\pi D^2}{4}t\left(f\,s+2\pi\beta^2 j_{bg}\right)}}=\frac{\frac{\sqrt{\pi t}\,D}{2}f_s}{\sqrt{f_s+2f_0\frac{\beta^2}{\beta_0^2}}}.$$

Здесь β_0 = 0.564″ – радиус кружка площадью 1 квадратная секунда, а f_0 – внеатмосферный блеск объекта. Пусть Δm – прозрачность атмосферы. Тогда

$$f_s=f_0 10^{-0.4\Delta m}.$$

Таким образом, время наблюдения равно

$$t=\frac{10^{-0.4\Delta m}+2\frac{\beta^2}{\beta_0^2}}{\frac{\pi D^2}{4}f_0 10^{-0.8\Delta m}}\epsilon^2.$$

Отсюда отношение времён измерения равно

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{10^{-0.4\Delta m_1}+2\frac{\beta_1^2}{\beta_0^2}}{10^{-0.4\Delta m_2}+2\frac{\beta_2^2}{\beta_0^2}}10^{0.8(\Delta m_1-\Delta m_2)}\approx 3.2\,.$$

Значит, для измерения в первом случае требуется в 3.2 раза большая экспозиция.

Рекомендации для жюри

Получение выражений для числа фотонов от объекта и от фона оцениваются **по 1 баллу**. Приведение наблюдаемых потоков к внеатмосферной величине – **2 балла**. Вычисление искомого соотношения времён – **4 балла**.

Максимальная оценка **– 8 баллов.**

(К. И. Васильев)

Задача 6

Невращающаяся звезда с массой M =10 M_0 и радиусом R = 5 R_0 раскручивается вокруг своей оси и становится эллипсоидом вращения. Найдите:

1) критическое отношение полуосей эллипсоида, при котором звезда начинает разрушаться из-за своего быстрого вращения;
2) максимально возможную линейную скорость вращения на экваторе;
3) минимальный период обращения звезды вокруг своей оси.

Считать, что вещество звезды сосредоточено в центре (массой оболочки и распределением вещества в ней можно пренебречь), при этом объём звезды остаётся постоянным. Объём эллипсоида вращения равен $(4/3)\pi a^2 b$, где b – полуось, вокруг которой происходит вращение.

Решение

Пусть звезда – это эллипсоид вращения с большой полуосью a и малой полуосью b (вращение происходит вокруг меньшей оси). Потенциал для этой звезды может быть записан в виде:

$$\psi=\frac{GM}{r}+\frac{\omega^2\left(x^2+y^2\right)}{2},$$

где ω – круговая частота вращения звезды, r – расстояние от центра звезды до её поверхности, x и y – декартовы координаты в экваториальной плоскости звезды, ось z совпадает с осью вращения звезды.

Форма звезды соответствует одной из эквипотенциальных поверхностей (т. е. поверхности равного потенциала). В данном случае $\psi = GM\ /\ b,$ так как на полюсе вращение не вносит каких-либо добавок в потенциал. Таким образом, для экватора звезды может быть записано следующее соотношение:

$$\frac{GM}{b}=\frac{GM}{a}+\frac{\omega^2 a^2}{2}.$$

Выражая из этого соотношения круговую частоту ω, получаем

$$\omega^2=\frac{2GM}{a^3}\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

где $\alpha=(a-b)/a$ – сжатие эллипса. Линейная скорость на экваторе звезды не может превышать первую космическую скорость, в противном случае звезда разрушится. Таким образом,

$$v_{\text{cr}}=\omega a=\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Разрешая это уравнение относительно α, получаем, что максимально возможное сжатие звезды может достигать 1/3. Следовательно, в предельном случае $a/b=3/2$.

Максимально возможная круговая частота отсюда получается равной

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{GM}{a^3}}.$$

Воспользуемся постоянством объёма звезды. Приравняв объёмы покоящейся и вращающейся звезды, получим следующее соотношение:

$$a^2 b=R^3.$$

Отсюда, в предельном случае

$$a^3=\frac{3}{2}R^3.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для круговой скорости, получаем

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{GM}{R^3}}\approx 1.5\times 10^{-4}\,\text{с}^{-1}.$$

Тогда максимально возможная скорость равна

$$v_{\text{cr}}=\omega_{\max}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}R=\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{GM}{R}}\approx 580\,\text{км/с},$$

а минимальный период обращения

$$P_{\min}=\frac{2\pi}{\omega_{\max}}\approx 4.3\times 10^4\,\text{с}\approx 0.5\,\text{сут}.$$

Рекомендации для жюри

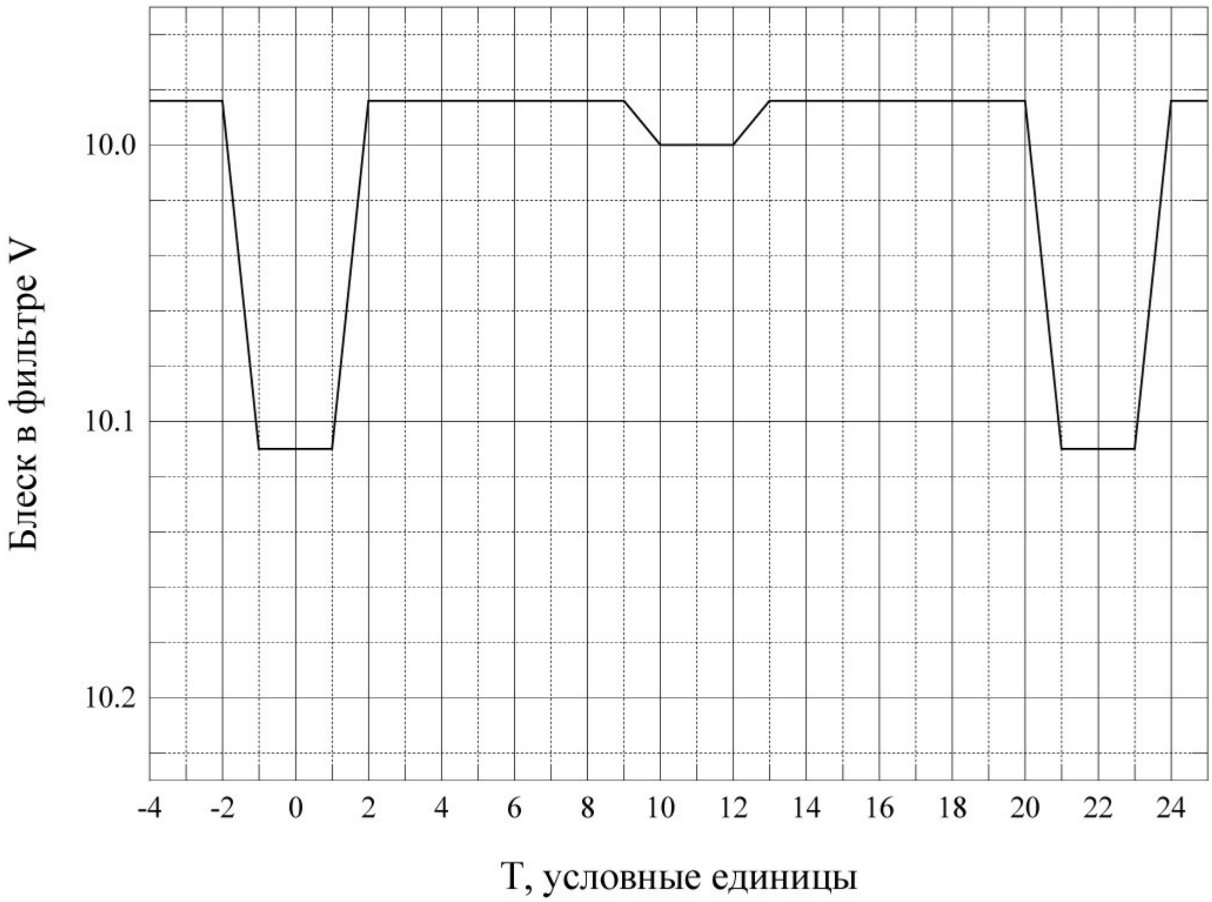
Указание, что критическая скорость на поверхности звезды – это первая космическая скорость, – **1 балл**, если скорость вращения звезды и период вычислены правильно – **по 1 баллу** (независимо от того, делается это для шарообразной звезды или для эллипсоида). Вывод выражения ω (a, α) оценивается в **3 балла**, круговой скорости – в **1 балл**, связи между большой полуосью и вращающейся и радиусом невращающейся звезды – **1 балл**.

Максимальная оценка **– 8 баллов.**

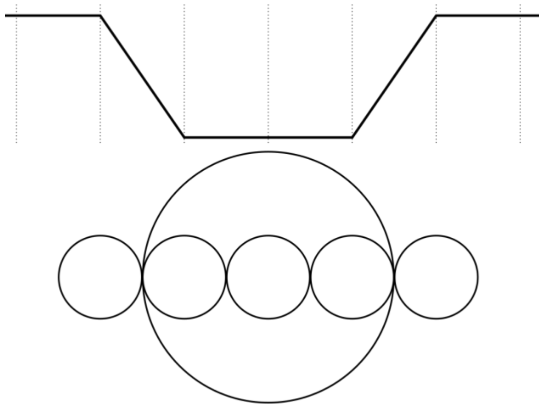
(А. И. Богомазов)

Задача 7

На рисунке представлена кривая блеска двойной звезды, полученная в фильтре V. Зная, что затмения в системе центральные, один из компонентов двойной имеет спектральный класс A0, а второй – G2, и оба компонента являются звёздами главной последовательности, постройте кривую изменения показателя цвета B-V этой системы. Ось ординат Вашего графика направьте вверх, нанесите деления и поставьте соответствующие значения показателей цвета. Для звезды G2V (B-V) = 0.65.



Решение



Раз затмения в системе центральные, мы можем из соотношения длительности частной и полной фазы найти отношение радиусов компонентов системы. За время, пока уменьшается блеск двойной, меньшая звезда проходит расстояние, равное её диаметру, а за время полной фазы – расстояние, равное разности диаметров большей и меньшей звёзд. Поскольку время частной фазы вдвое меньше, чем полной, то отношение радиусов звёзд будет равно R_1/R_2=3.

В главном минимуме всегда затмевается более горячая звезда. Глубина главного минимума невелика (чуть больше 0,1 звёздной величины или 10% от полного потока), что при полном затмении говорит о том, что более горячая звезда затмевается не полностью, т.е. она имеет больший размер: $R_1 = 3 \cdot R_2 = 3R_{\text{Солнца}}$ – радиус звезды A0V.

Во вторичном минимуме главная звезда полностью закрывает собой звезду G2V. Значит, блеск звезды A0V равен блеску системы в этом минимуме, т.е. $V_1 = 10.^m00$. Т. к. $(B-V)$ звезд A0V = 0 по определению, то и в фильтре B во вторичном минимуме звезда будет иметь блеск $B_1 = 10.^m00$.

Из кривой блеска видно, что блеск системы вне затмения равен $9.^m984$. Зная блеск звезды A0V, мы можем найти блеск звезды G2V в фильтре V: $V_2 = 14.^m57$. Значит, в фильтре B её блеск будет равен $B_2 = 15.^m22$.

Т. к. блеск звезды A0V почти на 5 величин ярче блеска звезды G2V, то показатель цвета системы будет очень близок к показателю цвета A0V, но всё же немного краснее (больше). Грубо оценим эту величину таким образом:

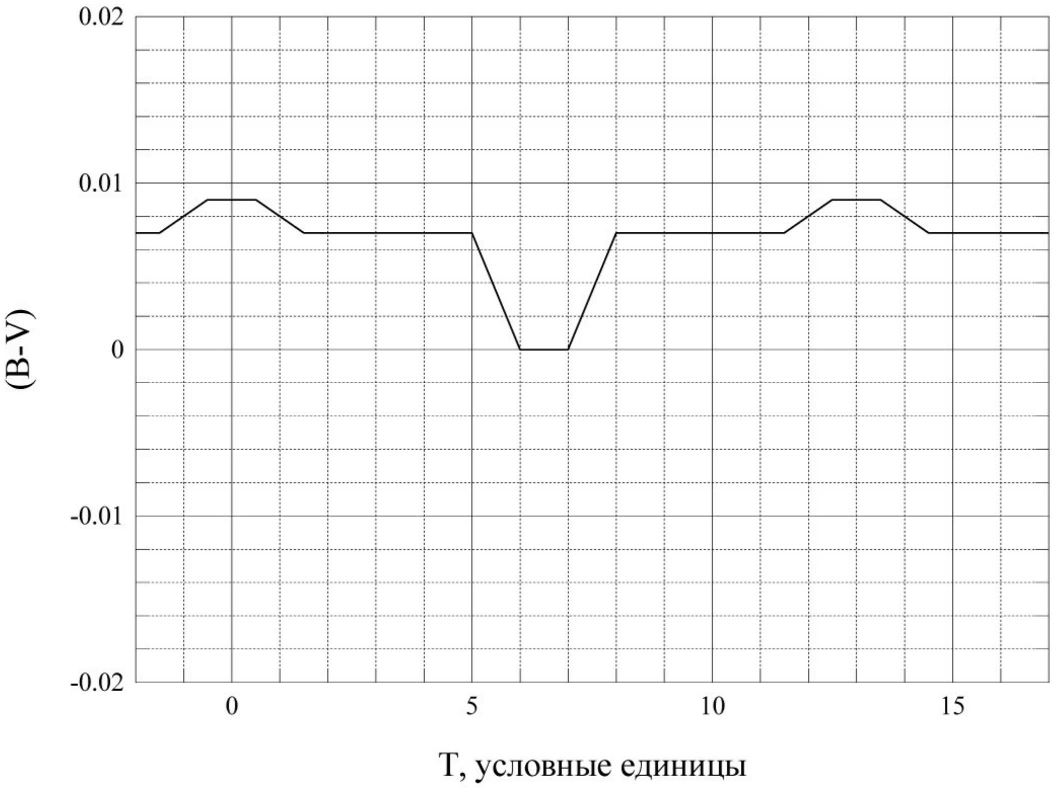
$$(B-V)_{\text{системы}} \approx (B-V)_{\text{A0V}} + K \cdot (B-V)_{\text{G2V}},$$

где $K = 2.512^{-(V_2 - V_1)} = 0.015$. Тогда $(B-V)_{\text{системы}} \approx 0.^m01$.

Это же можно сделать точнее, если вычислить блеск системы вне затмения в фильтрах B и V:

$$(B-V) = B_1 - 2.5\lg\left(10^{0.4(B_1-B_2)} + 1\right) - \left[V_1 - 2.5\lg\left(10^{0.4(V_1-V_2)} + 1\right)\right] = 0.007.$$

В главном затмении вклад звезды A0V уменьшится на 1/9, т.е. цвет станет несколько краснее (показатель цвета станет чуть больше – если подставить эти значения в предыдущую формулу, то получится $(B-V)=0.^m008$), во вторичном затмении $(B-V) = 0.^m00$. Т. е. можно нарисовать график:



Примерно такой же ответ можно получить и без использования полной формулы для вычисления $(B-V)$.

Примечание: возможен другой путь решения. Например, известно, что A0V – это звезда типа Веги, а G2V – типа Солнца. Вега имеет 0 звёздную величину, и расстояние до неё порядка 8 пк. Отсюда можно найти абсолютную звёздную величину Веги: $M = m + 5 - 5 \lg R = 0.48$. Т.е. мы имеем двойную систему (пренебрежём болометрическими поправками для этих звёзд) из звёзд примерно 0.5^m и 5^m. В фильтре V разность звёздных величин будет 4.5, а в фильтре B – разность 5.15 (что соответствует п.4 из решения выше).

Можно найти радиус Веги: $L \approx 60L_\odot$ (т. к. $M \sim 0.5$, а $M_\odot \sim 5$), $T_{A0V} \sim 10000K$, $R \sim 2.8R_\odot$. Однако для того, чтобы получить верные цвета в затмениях, всё равно требуется анализ того, какие звёзды затмеваются в каком минимуме.

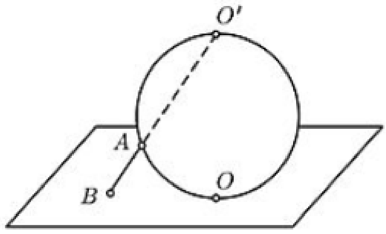
Рекомендации для жюри

Определение отношения радиусов звёзд – **2 балла**. Вывод, что горячая звезда больше, – **1 балл**. Определение V_1, B_1, V_2, B_2 – **по 1 баллу** за каждое. Вычисление $B-V$ в главном минимуме и вне затмения – **по 2 балла**. Рисунок – **1 балл**. Если после вычисления $B-V$ для главной звезды делается вывод, что более холодная звезда вносит пренебрежимо малый вклад в показатель цвета и он всегда равен 0, то за такое решение с рисунком выставляется не более **6 баллов**.

Максимальная оценка **– 12 баллов.**

(А. М. Татарников)

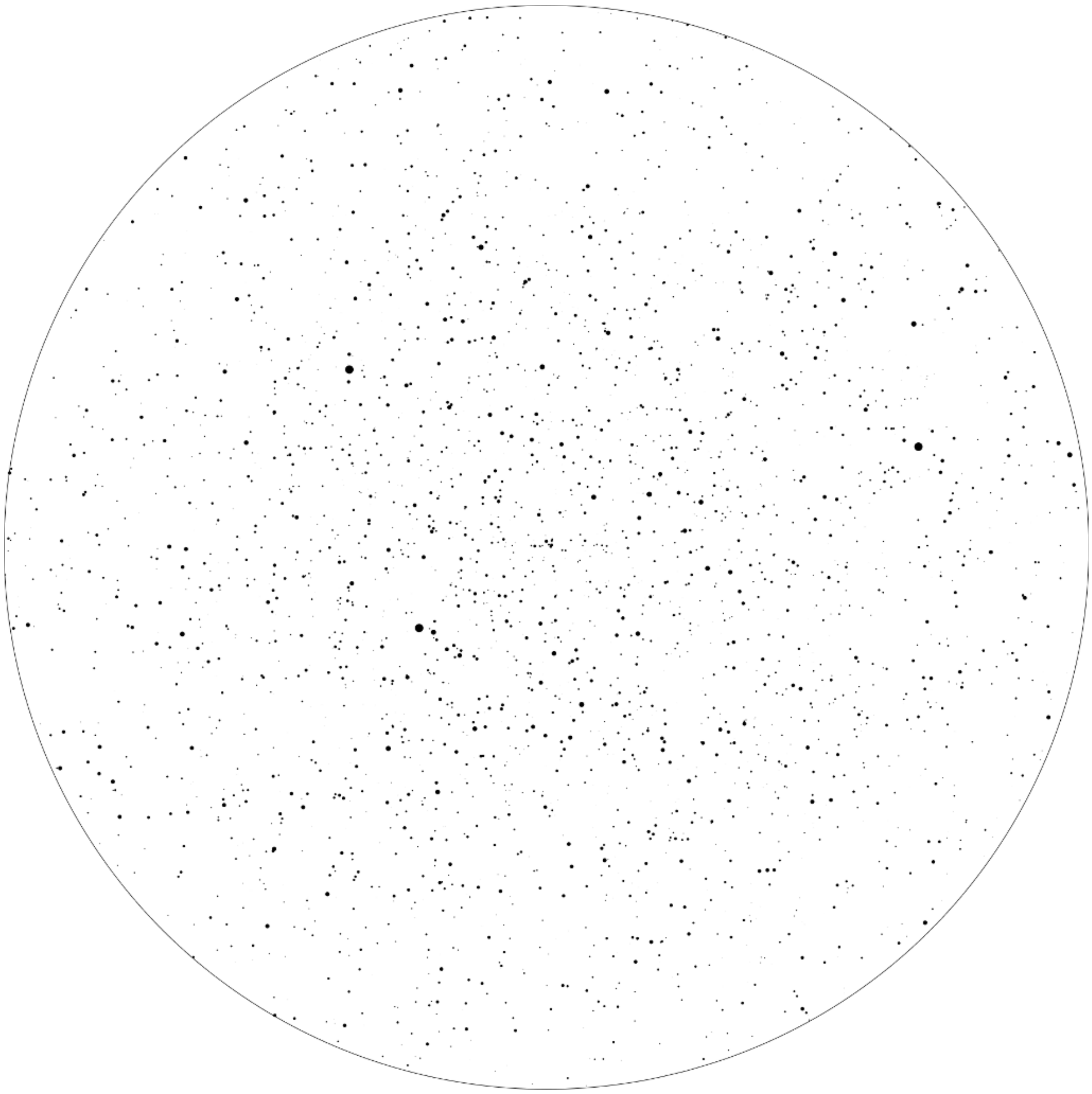
Задача 8



Вам дана карта звёздного неба на планете в далёкой галактике в стереографической проекции. Поле зрения карты – ровно половина небесной сферы, видимая в данный момент с какой-то точки планеты.

Стереографической проекцией точки A на плоскость является точка B – пересечение прямой O′A с этой плоскостью (см. рисунок). O – центр карты. O′ – точка, диаметрально противоположная центру.

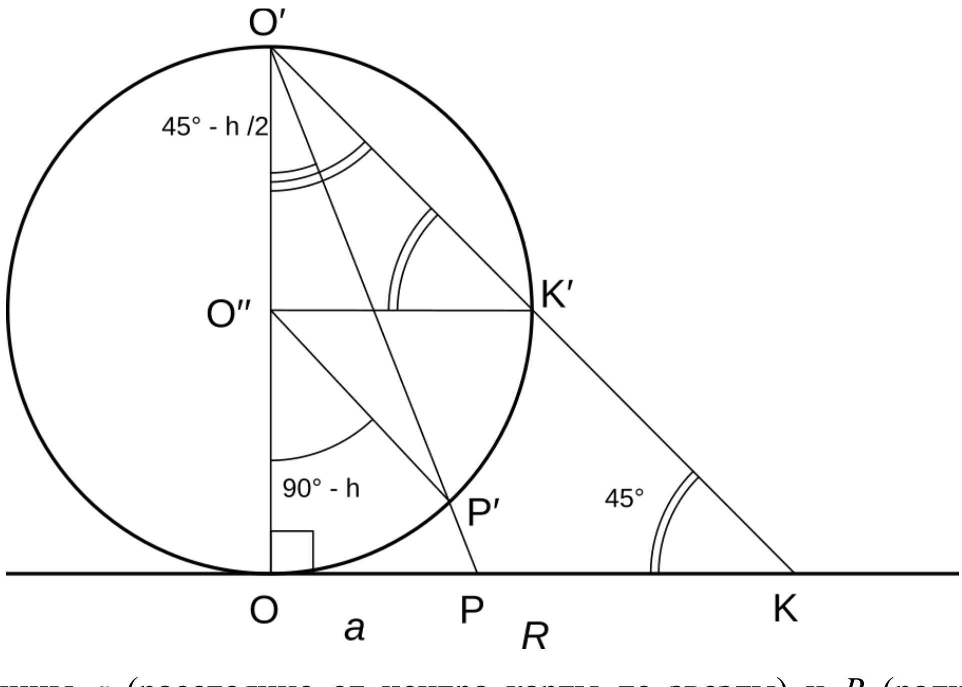
1) На карте отчётливо видно три наиболее яркие звезды. Определите их высоты над горизонтом в момент наблюдения.
2) Вычислите попарные угловые расстояния между этими звёздами.
3) Что Вы можете сказать о типе этой далёкой галактики?



Решение

1) Выведем формулу для углового расстояния произвольной точки от края кадра. Пусть O″ – центр небесной сферы, O – центр карты, а O′ – антицентр карты. Поскольку в поле зрения попадает ровно половина небесной сферы, краю карты (точка K) соответствует точка на небесной сфере K′. Радиусы O″K′ и O″O′ перпендикулярны друг другу, а значит, прямая O′K лежит под углом 45° к прямой OK, лежащей в плоскости карты, причём радиус карты R получается равным диаметру небесной сферы. Пусть P′ – звезда, а P – её отображение на плоскость. Пусть отрезок OP равен a. Высоту звезды над горизонтом K′O″P′ обозначим как h. Тогда угол P′O″O – зенитное расстояние $z = 90° - h$. Угол P′O′O опирается на ту же дугу, что и центральный угол P′O″O, а значит, он вдвое меньше. Тогда

$$\frac{a}{R} = \mathrm{tg}\left(45° - \frac{h}{2}\right).$$



Обе величины a (расстояние от центра карты до звезды) и R (радиус карты) определяются из рисунка. Значит, мы можем вычислить величину h по формуле

$$h = 90° - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{R}.$$

Пользуясь этой формулой, получаем

$$h_1 \approx 38°,$$

$$h_2 \approx 19°,$$

$$h_3 \approx 59°.$$

2) Пользуясь теоремой косинусов, находим угловые расстояния между звёздами. В данном случае углы разности азимутов ΔA можно просто измерять

транспортиром, так как полюс системы координат находится в центре карты и круги высоты отображаются в прямые линии.

$$\cos l = \sin h_1 \sin h_2 + \cos h_1 \cos h_2 \cos \Delta A.$$

$$\Delta A_{12} \approx 123^\circ \qquad l_{12} \approx 102^\circ$$

$$\Delta A_{13} \approx 75^\circ \qquad l_{13} \approx 51^\circ$$

$$\Delta A_{23} \approx 167^\circ \qquad l_{23} \approx 101^\circ$$

3) Так как на карте не видно концентрации звёзд ни к одному из больших кругов, эта галактика, вероятнее всего, эллиптическая.

Рекомендации для жюри

Вывод формулы для вычисления высоты – **3 балла**. Вычисление высот каждой из звёзд – **по 1 баллу**. Применение сферической теоремы косинусов – **2 балла**. Вычисление угловых расстояний – **по 1 баллу**. Ответ на третий вопрос с пояснением – **1 балл**.

Максимальная оценка **– 12 баллов.**

(С. Г. Желтоухов)

Всего за работу – 64 балла.