1. *Ответ*. $\log_2 3$, $\log_3 5$, $\log_5 2$.

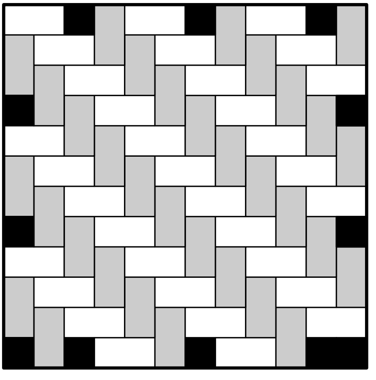
Решение. В обозначениях $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_5 2$ исходное уравнение принимает вид

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0,$$

что равносильно уравнению $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$.

2. *Ответ*. Да, может.

Решение. Построим «паркет», в котором чередуются ряды вертикальных 2×1 и горизонтальных 1×2 доминошек. На рисунке эти ряды показаны серым и белым цветом для доски 12×12 (непокрытые клетки доски закрашены чёрным).



Похожий пример можно построить и для доски размером 2018×2018. Непокрытыми могут остаться лишь некоторые клетки первой строки и столбца, а также последней строки и столбца. Поэтому доля непокрытых клеток от их общего числа будет не более, чем $\frac{4 \cdot 2017}{2018 \cdot 2018} < \frac{4}{2018} < 1\%$. Значит, будет покрыто более 99% всех клеток доски.

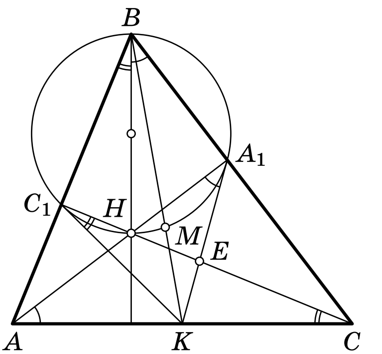
3. *Ответ*. 98721.

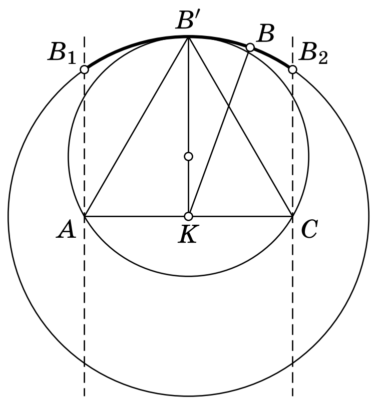
Решение. Данное равенство при условии, что $\operatorname{tg} x^\circ$ и $\operatorname{tg} y^\circ$ определены, эквивалентно равенству $\operatorname{tg}(x-y)^\circ = 1$, откуда $x - y = 45 + 180n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, разность $x - y$ делится нацело на 45, а значит, на 5 и на 9. Поскольку сумма всех цифр делится на 9, то каждое из чисел x и y делится на 9.

Наибольшее пятизначное число, все цифры которого различны, равно 98765. Ближайшее к нему меньшее число, делящееся на 9, равно 98757 и содержит повторяющиеся цифры. Последовательно уменьшая это число на 9, получаем числа 98748, 98739, 98730, 98721. Первые два из них также содержат повторяющиеся цифры. Третье состоит из различных цифр, но поскольку $98730 = 90 + 180 \cdot 548$, то его тангенс не определён. Число $x = 98721$ также состоит из различных цифр. Если взять, например, $y = 54036$, то получим $x - y = 44685 = 45 + 180 \cdot 248$, поэтому число 98721 искомое.

4. *Ответ.* $(\operatorname{arctg}\sqrt{2}; 60^\circ]$.

Решение. Пусть K — середина стороны AC, $AC = b$ и $BK = m$. Тогда прямые KC_1 и KA_1 касаются окружности, описанной вокруг треугольника A_1BC_1, так как углы, отмеченные на рисунке слева одинаковым образом, равны. По усло-





вию точка M лежит на окружности, описанной вокруг треугольника A_1BC_1. Поэтому $(b/2)^2 = KC_1^2 = KM \cdot KB = m/3 \cdot m$, так как точка M делит медиану BK в отношении $2:1$. Отсюда $m = \sqrt{3}b/2$, и при фиксированном b точка B лежит на окружности с центром K и радиусом $\sqrt{3}b/2$. В одном из положений получается точка B' — вершина правильного треугольника $AB'C$. Получаем картинку, изображённую на рисунке справа.

Точка B лежит на дуге B_1B_2 большей окружности, так как треугольник ABC остроугольный. При этом угол B меняется в достаточно малом диапазоне: от $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, не включая (это наименьшее значение соответствует точкам B_1 и B_2 и прямоугольному треугольнику ABC с катетами b и $b/\sqrt{2}$), до 60° (это наибольшее значение угла B, поскольку две окружности на рисунке справа касаются внутренним образом, и поэтому $\angle ABC < \angle AB'C$ при $B \neq B'$). В силу непрерывности угла ABC при движении точки B по дуге $B'B_2$ любое промежуточное значение из интервала $(\operatorname{arctg}\sqrt{2};\, 60^\circ)$ соответствует некоторому положению B'' точки B. Для построенного треугольника $AB''C$ точка M будет лежать на окружности, описанной около треугольника A_1BC_1, так как будет выполнено соотношение $KC_1^2 = KM \cdot KB$.

Комментарий. Соотношение $(b/2)^2 = m^2/3$ можно получить и другим способом. Если D — точка, симметричная B относительно точки K, то $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $\angle DAH = \angle DCH = 90^\circ$, и, кроме того, $\angle DMH = 180^\circ - \angle BMH = 90^\circ$. Поэтому точки A, C и M лежат на окружности, построенной на DH как на диаметре. Следовательно, $AK \cdot KC = MK \cdot KD$, откуда и следует требуемое соотношение.

5. *Решение.* Пусть окрашенная сфера S имеет центр O, и пусть S_i — полусферы, окрашенные в i-й цвет, $i = 1, \ldots, 5$. Пусть A_i — срединная точка полусферы S_i: $A_i \in S_i$ и плоскость, проходящая через граничную окружность полусферы S_i, перпендикулярна вектору $\overrightarrow{OA_i}$.

Выпуклая оболочка точек $A_1, \ldots, A_5$ есть выпуклый многогранник M с вершинами $A_1, \ldots, A_5$. Покажем, что этот многогранник содержит точку O. Действительно, если $O \notin M$, то найдется такая плоскость α, проходящая через O, что M лежит строго внутри одного из полупространств, на которые α делит все пространство. Тогда для точки $P \in S$, лежащей в другом полупространстве и такой, что $\overrightarrow{OP} \perp \alpha$, все скалярные произведения $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA_i}$ отрицательны, откуда точка P не принадлежит никакой полусфере S_i, а значит, не покрашена.

Принадлежность $O \in M$ в свою очередь означает, что O принадлежит одному из тетраэдров, образованных какими-то четырьмя точками из $A_1, \ldots, A_5$ (M есть объединение таких тетраэдров). Пусть, без ограничения общности, точка O принадлежит тетраэдру с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4. Это означает, что сфера S покрашена первыми четырьмя красками: если $A \in S$ и $A \notin S_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$, то $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA_i} < 0$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$, то есть весь тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ лежит строго в одном полупространстве относительно плоскости, проходящей через O перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OA}$, и не может содержать точку O.

Комментарий редактора. Доказывать, что точка O внутри многогранника M действительно лежит в одном из указанных тетраэдров, можно следующим образом. Пусть луч, выходящий из точки A_1 и проходящий через точку O, пересекает дальше границу многогранника в точке Q. Поскольку точка Q лежит на одной из граней многогранника, она принадлежит треугольнику с вершинами в каких-то трех из исходных точек, A_i, A_j, A_k. А значит, O принадлежит тетраэдру $A_1A_iA_jA_k$. (Само это утверждение является частным случаем *теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке*: любая точка n-мерного пространства, принадлежащая выпуклой оболочке нескольких точек, принадлежит и выпуклой оболочке не более чем $n+1$ из этих точек.)