8 класс

1. *Ответ.* Да, могло.

Решение. Приведем пример. Пусть изначально у фирм соответственно 60, 35, 20 таверн. Тогда в первый день 1-я фирма лишится 48 таверн, и останется 12, 35, 20 таверн. На второй день закроется 28 таверн второй фирмы, и останутся 12, 7, 20 таверн. Наконец, на третий день закроются 16 таверн третьей фирмы.

Замечание. Существует множество других примеров.

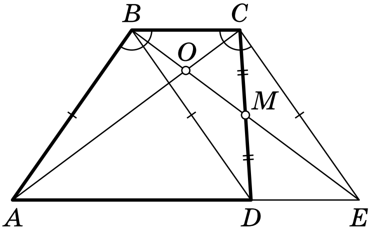
2. *Ответ.* 2000.

Первое решение. Заметим, что число 2019 представляется как $3 \cdot 673$, где числа 3 и 673 — простые, а выражение $n^2+20n+19$ представляется как $(n+19)(n+1)$.

Хотя бы одно из чисел $n+19$ или $n+1$ должно делиться на 3. Но так как эти числа отличаются на 18, то они оба делятся на 3. Кроме того, какое-то из них должно делиться на 673. Значит, какое-то из этих чисел делится на 2019. Наименьшее n, при котором это возможно — это 2000.

Второе решение. Запишем условие в виде сравнения: $n^2+20n+19 \equiv 0 \pmod{2019}$, откуда следует $n^2+20n+19 \equiv 0 \Leftrightarrow n^2+2n+1 \equiv 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 0 \pmod{3}$ и $n^2+20n+19 \equiv 0 \Leftrightarrow (n+1)(n+19) \equiv 0 \pmod{673}$. Первое сравнение имеет по модулю 3 единственное решение -1, второе по модулю 673 имеет два решения: -1 и -19. Учитывая, что числа 3 и 673 простые и $-19 \equiv -1 \pmod{3}$, получаем, что $n \equiv -1 \pmod{2019}$ или $n \equiv -19 \pmod{2019}$, откуда и следует ответ.

3. *Решение.* На луче BM за точку M отметим точку E так, что $ME = MB$ (см. рис.). Заметим, что $BCED$ — параллелограмм, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Тогда $DE \parallel BC$, откуда следует, что точка E лежит на прямой AD.

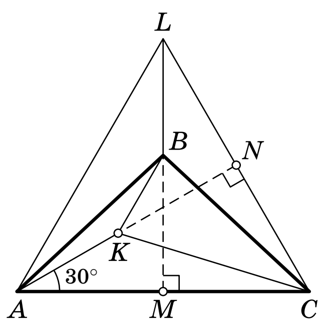


Имеем $AB = BD = CE$, т. е. $ABCE$ — равнобедренная трапеция. Так как ее углы ABC и BCE равны, то треугольники ABC и ECB равны по двум сторонам ($AB = EC$, $BC = CB$) и углу между ними. Тогда равны и их соответственные углы BCA и CBE, откуда следует требуемое.

4. *Решение.* Назовем самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в конфигурации, симметричной изначальной. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

5. *Ответ.* 150°.

Первое решение. Построим на AC равносторонний треугольник ACL так, чтобы точки L и B лежали с одной стороны от AC (см. рис.).

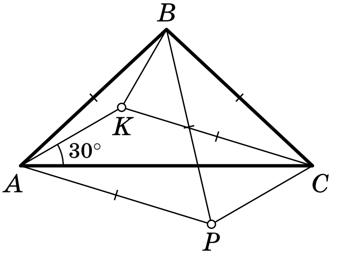


Проведем в треугольнике ABC высоту BM, она же серединный перпендикуляр к стороне AC. Так как ALC — равносторонний, точка L также лежит на прямой BM. Кроме этого, проведем в треугольнике ALC высоту AN. Так как AN является биссектрисой угла LAC, то точка K лежит на этой прямой. Отметим также, что K лежит с той же стороны от BM, что и A, так как из-за $CK = CB$ она не может лежать внутри треугольника BMC; таким образом, K лежит на отрезке AN.

Заметим, что прямоугольные треугольники BMC и KNC равны по катету и гипотенузе ($MC = AC/2 = LC/2 = NC$, $BC = KC$). Отсюда следует, во-первых, что $BM = KN$, во-вторых, что B лежит на отрезке LM (так как $BM = KN < AN = LM$), и, наконец, что $LB = LM - BM = AN - KN = AK$.

Теперь рассмотрим четырехугольник $ALBK$. В нем $\angle LAK = \angle ALB = 30^\circ$ и $AK = LB$, то есть это равнобокая трапеция. Отсюда следует, что $\angle AKB = 180^\circ - \angle KAL = 150^\circ$.

Второе решение. Построим на отрезке AB равносторонний треугольник ABP так, чтобы точки P и C лежали по одну сторону от прямой AB (см. рис.). Тогда треугольник PBC — равнобедренный с основанием PC ($BP = AB = BC$).



Как известно, любой отрезок, лежащий внутри треугольника, короче одной из его сторон (если он не совпадает ни с одной из них); а так как отрезок CK равен сторонам AB и BC треугольника ABC, он должен быть короче AC. Отсюда следует, что для треугольника ABC верно $AC > AB = BC$, то есть $\angle ABC > 60^\circ > \angle BAC$. Следовательно, точка P лежит по другую сторону от прямой AC, чем точка B.

Заметим, что

$$\angle BCP = \frac{180^\circ - \angle PBC}{2}$$

и

$$\angle BCA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2},$$

так как треугольники ABC и PBC — равнобедренные. Тогда

$$\angle PCA = \angle PCB - \angle ACB = \frac{(180^\circ - \angle PBC) - (180^\circ - \angle ABC)}{2} = \\ = \frac{\angle ABC - \angle PBC}{2} = \frac{\angle ABP}{2} = 30^\circ,$$

так как треугольник ABP — равносторонний. Из равенства углов $\angle KAC = 30^\circ = \angle ACP$ получаем $AK \parallel CP$.

Параллельность AK и CP и равенство $KC = AP$ означают, что четырехугольник $AKCP$ — параллелограмм или равнобокая трапеция. Заметим, что $\angle KAP < \angle BAP = 60^\circ < 90^\circ$ и $\angle KCP < \angle PCB < 90^\circ$ (угол при основании равнобедренного треугольника), но в равнобокой трапеции сумма противоположных углов равна 180°, следовательно, $AKCP$ — параллелограмм.

Осталось посчитать углы. Пусть $\angle BAK = \alpha$, тогда

$$\angle CAP = \angle BAP - \angle BAK - \angle KAC = 30^\circ - \alpha.$$

При этом $\angle KCA = \angle CAP$, так как $AKCP$ — параллелограмм.

Заметим, что

$$\angle BCK = \angle BCA - \angle KCA = \angle BAC - \angle KCA = \\ = \alpha + 30^\circ - (30^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

Следовательно, из суммы углов треугольника BKC получаем

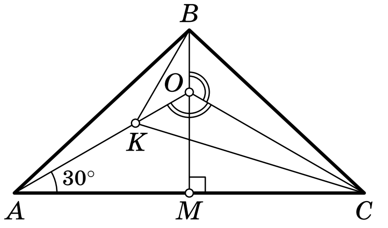
$$\angle KBC = \frac{180^\circ - \angle BCK}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

При этом, из суммы углов треугольника ABC получаем

$$\angle ABC = 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - 2(30^\circ + \alpha) = 120^\circ - 2\alpha.$$

Наконец, рассмотрим треугольник ABK. В нем известны углы $\angle ABK = 30^\circ - \alpha$ и $\angle BAK = \alpha$. Следовательно, третий угол $\angle AKB = 150^\circ$.

Третье решение. Проведем в треугольнике ABC высоту BM и обозначим ее точку пересечения с прямой AK за O (см. рис.). Заметим, что $\angle AOM = 60^\circ$ и, из симметрии относительно BL, $\angle COM = 60^\circ$. Тогда имеем $\angle AOC = 120^\circ$ и



$\angle COB = 120^\circ$, то есть лучи OB и OK симметричны относительно прямой CO. Так как точки B и K являются пересечениями этих лучей с некоторой окружностью с центром в C (которая тоже симметрична относительно CO), то и сами эти точки симметричны; в частности, имеем $OB = OK$.

Получаем, что треугольник BKO равнобедренный с углом 120° при вершине O, откуда $\angle OKB = 30^\circ$ и $\angle AKB = 150^\circ$.

6. *Ответ.* При четных n.

Решение. Сначала приведем «оценку», то есть продемонстрируем, что при нечетных n так заполнить таблицу не удастся. Предположим противное и рассмотрим подходящую расстановку чисел. Покрасим таблицу шахматной раскраской так, чтобы клетка в 1-м столбце и 1-й строке оказалась черной; при этом черными окажутся те клетки, сумма номеров строки и столбца которых четна, а белыми — те, у которых эта сумма нечетна. Заметим, что, так как в последовательности от 1 до n^2 цвета клеток должны чередоваться, числа одной четности должны оказаться в черных клетках, а другой четности — в белых.

Рассмотрим клетки таблицы, в которых стоят числа, дающие остаток k при делении на n. Сумма их номеров строк и столбцов, с одной стороны, равна

$$(1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots+n),$$

так как каждая строка и каждый столбец участвуют по одному разу; в частности, эта сумма четна. С другой стороны, у каждой белой клетки сумма нечетна, что означает, что белых клеток среди рассмотренных должно быть четно (иначе общая сумма была бы нечетна).

Наконец, заметим, что при $k=1$ среди чисел 1, $1+n$, ..., $1+nm$, ..., $1+n(n-1)$ цвета соответствующих клеток чередуются (соседние числа в этой последовательности имеют разную четность); число белых среди них четно, поэтому число черных нечетно. Однако числа $1+nm$ и $2+nm$ имеют разные цвета, откуда следует, что при $k=2$ среди чисел 2, $2+n$, ..., $2+nm$, ..., $2+n(n-1)$, наоборот, число белых нечетно, что невозможно.

Теперь покажем, как заполнить таблицу для четных n. Приведем пример таблицы 8×8, заполненной требуемым образом (для наглядности кружочками выделены числа, дающие остаток 5 при делении на 8).

1	2	3	4	5	6	7	8
64	51	50	37	36	23	22	9
63	52	49	38	35	24	21	10
62	53	48	39	34	25	20	11
61	54	47	40	33	26	19	12
60	55	46	41	32	27	18	13
59	56	45	42	31	28	17	14
58	57	44	43	30	29	16	15

Примеры для других четных n строятся аналогично: верхняя строка заполняется числами от 1 до n слева направо, далее правый столбец заполняется следующими числами сверху вниз, следующий столбец (кроме уже занятой верхней клетки) заполняется снизу вверх, и т. д.

Докажем, что построенный таким образом пример подходит. Строчки будем нумеровать от 1 до n сверху вниз, а столбцы — справа налево. Ясно, что первое условие (соседние числа находятся в соседних клетках) выполнено.

Докажем, что в k-м столбце все числа дают разные остатки от деления на n. Первое число в нем равно k, а до следующего по величине числа t, стоящего в этом столбце (во 2-й или n-й строке), «цепочка» чисел прошла всю правую часть таблицы, то есть ровно $n(n-k)$ клеток. Значит, $t=k+1+n(n-k)$ и дает тот же остаток от деления на n, что и $k+1$. Получаем, что числа в столбце эквивалентны k, $k+1$, $k+2$, ..., $k+n-1$ при делении на n, то есть дают различные остатки.

Теперь рассмотрим строки. Ясно, что в 1-й строке все остатки от деления на n различны. Рассмотрим k-ю строку, $k > 1$. Воспользуемся тем, что четные и нечетные числа в строке чередуются (как уже было показано в доказательстве оценки, четные и нечетные числа располагаются на клетках разных цветов при шахматной раскраске).

При этом четные числа дают четные остатки от деления на n, а нечетные — нечетные остатки (это верно только когда n четно). Также заметим, что последовательные четные числа в строке увеличиваются на $2(n-1)$, если идти справа налево, то есть их остатки уменьшаются на 2 (возможно, с переходом через 0); так как всего их $n/2$, то они как раз дают все различные четные остатки от деления на n. По тем же причинам нечетные числа в рассмотренной строке дают все нечетные остатки. Следовательно, все остатки в строке различны.

Другое доказательство оценки.[1] Докажем, что при нечетных n таблицу заполнить не удастся, другим способом. Предположим, что у нас имеется расстановка чисел, подходящая под условие.

Лемма. Если число $ln+1$ находится в одной строке или в одном столбце с числом $km+2$, то число $kn+1$ находится в одной строке или в одном столбце с числом $lm+2$.

Доказательство леммы. Рассмотрим пару чисел $kn+1$ и $kn+2$. Без ограничения общности будем считать, что они соответственно в m-м и $(m+1)$-м столбцах (всегда можно развернуть таблицу так, чтобы это было верно). Заметим, что в $(m+1)$-м столбце есть число вида $ln+1$. Тогда число $ln+2$ не может располагаться в $(m+1)$-м столбце, так как там уже есть $kn+2$.

Предположим, что число $ln+2$ находится в $(m+2)$-м столбце. Рассмотрим тогда число k_3n+1, которое есть в этом столбце. Соответствующее ему k_3n+2 уже не может оказаться ни в $(m+2)$-м, ни в $(m+1)$-м столбцах; значит, оно находится в $(m+3)$-м столбце. Можно продолжать так и далее: число k_in+2 находится в $(m+i)$-м столбце, в нем же находим некоторое число $k_{i+1}n+1$, тогда число $k_{i+1}n+2$ должно находится в $(m+i+1)$-м столбце. Заметим, что этот

[1]Это доказательство основано на работе Никиты Солоницына.

процесс не может завершиться — но через конечное число шагов столбцы закончатся. Противоречие.

Следовательно, число $ln+2$ должно располагаться в m-м столбце, что завершает доказательство леммы.

Заметим, что произвольному числу вида $kn+1$ мы можем однозначно сопоставить другое число $ln+1$, которое находится в одном столбце или в одной строке с $kn+2$. По лемме, это сопоставление будет взаимным, то есть все числа вида $kn+1$ разобьются на пары.

Но всего таких чисел n. Следовательно, n четно.