**5 марта 2011 год. 65-я Московская астрономическая олимпиада**
**Заключительный этап.**
**Решения.**

*10-11 классы*

1. Предположим, 21 марта наблюдатель видит Солнце восходящим точно в точке востока. В какой точке (при наблюдении из того же пункта) Солнце пересечёт горизонт при восходе 21 марта следующего года - тоже в точке востока, южнее или севернее неё?

**Решение:** При решении задачи мы пренебрегаем рефракцией, поскольку её влияние в обоих случаях будет одинаковым. В точке востока восходят светила, находящиеся на небесном экваторе. Следовательно, восход при наблюдении из упомянутого пункта совпал с точным моментом весеннего равноденствия. Весеннее равноденствие повторится примерно через 365,25 суток (точнее, через 365,2422 суток – этот период называют тропическим годом) и уже не совпадёт с моментом восхода для этого пункта, поскольку число суток в году нецелое. Если год простой, то 21 марта следующего года Солнце (точнее, его центр) будет ещё южнее небесного экватора и взойдёт южнее точки востока. Если год високосный, то 21 марта следующего года Солнце будет севернее небесного экватора и взойдёт севернее точки востока.

2. В телескоп диаметром 300 мм на пределе можно зарегистрировать звезды с блеском $23^m$. Какого минимального размера астероиды можно обнаружить с его помощью в лагранжевых точках: L4, L5 орбиты Земли?

**Решение:**
Обозначим r – расстояние от Земли до астероида, R – расстояние от Солнца до астероида, D – диаметр, A – альбедо, Ф - фаза астероида, $L_0$ – светимость Солнца. Тогда на Землю от астероида придет поток: $F = A\Phi\frac{\pi D^2}{4}\frac{L_0}{4\pi R^2}\frac{1}{2\pi r^2}$, а от Солнца поток $F_0 = \frac{L_0}{4\pi R^2}$. Отношение этих потоков: $\frac{F}{F_0} = A\Phi\frac{D^2}{4}\frac{1}{2r^2}$.

Из формулы Погсона имеем: $2.512^{m_0-m} = \frac{F}{F_0} = A\Phi\frac{D^2}{4}\frac{1}{2r^2}$, где $m_0$ – звездная величина Солнца. Отсюда: $D = r\times 2.512^{0.5(m_0-m)}\sqrt{\frac{8}{A\Phi}}$.

Точки L4 и L5 расположены на орбите Земли в вершинах равносторонних треугольников Солнце-Земля-астероид. Поэтому расстояние до астероида r=R=1 а.е. Фазовый угол будет равен $60^o$, значит фаза будет равна

$\Phi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 0.75$. Альбедо примем равным альбедо Луны A=0.1, а звездную величину Солнца $-26.^m7$. Значит диаметр астероида D=180 м.

3. Спутник массой 2 тонны движется вокруг Солнца по эллиптической орбите с большой полуосью 2 а.е. и перигелийным расстоянием 0.5 а.е. В афелии своей орбиты он сталкивается с астероидом диаметром 1 км, движущимся по круговой орбите. Оцените в тротиловом эквиваленте энергию, выделившуюся при столкновении спутника с астероидом, считая удар абсолютно неупругим (все части спутника остались на астероиде). Энергия взрыва 1 кг тротила 4230 кДж/кг.

**Решение:**
Найдем скорости объектов перед столкновением. Для этого найдем расстояние от Солнца до спутника в афелии его орбиты: Q=2a-q=3.5 а.е. (q – расстояние в перигелии, a – большая полуось) и эксцентриситет орбиты спутника: q=a(1-e), отсюда e=1-q/a=0.75. Т.к. столкновение происходит в афелии орбиты спутника, то скорость спутника будет равна

$V = \sqrt{\frac{GM_0}{a}\frac{1-e}{1+e}} = V_k\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 21.1 * 0.38 = 8$ км/сек, где $M_0$ – масса Солнца, $V_k$=21.1 км/сек – скорость кругового движения по орбите с a=2 а.е. (скорость движения астероида).

Энергия, выделившаяся при столкновении будет равна (полный корректный вывод требует рассмотрения закона сохранения энергии совместно с законом сохранения импульса): $E = \frac{mV_{om}^2}{2}$, где $V_{om}$ – скорость сближения объектов.

Возможно 2 случая – столкновение на встречных курсах и столкновение спутника с догоняющим его астероидом.

1) $V_{om}$=29.1 км/сек, E=$8.5*10^{11}$ Дж, что соответствует $2*10^5$ кг или 200 тонн в тротиловом эквиваленте.

2) $V_{om}$=13.1 км/сек, E=$1.7*10^{11}$ Дж, что соответствует $4*10^4$ кг или 40 тонн в тротиловом эквиваленте.

4. Найдите амплитуду изменения звездной величины Солнца, видимого с карликовой планеты Эрида. Большая полуось орбиты Эриды равна 67 а.е , а эксцентриситет – 0.44.

**Решение:**
Изменение блеска Солнца, наблюдаемого с Эриды, будет вызвано изменением расстояния до него из-за орбиталльного движения планеты. Расстояние в афелии орбиты Ra=a(1+e), а в перигелии Rp=a(1-e). По формуле Погсона амплитуда этого изменения будет равна:

$$\Delta m = 2.5\lg\frac{E_p}{E_a} = 2.5\lg\frac{R_a^2}{R_p^2} = 5\lg\frac{R_a}{R_p} = 5\lg\frac{1+e}{1-e} = 2.05$$

5. Максимальное расстояние между звездами 80 а.е, минимальное 60 а.е, массы звезд 1 масса Солнца и 3 массы Солнца. Вычислите период обращения этой системы и эксцентриситеты орбит звезд.

**Решение:**

Обозначим большую звезду цифрой 1, а более меньшую цифрой 2. Найдем расстояние в перицентре и апоцентре для каждой звезды относительно центра масс. Центр масс находится по правилу рычага, соответственно можно записать:

$$\frac{R_{a1}}{R_{a2}} = \frac{M_2}{M_1}$$

$$R_{a1} + R_{a2} = R_{max}$$

Подставляя величины в данные формулы получаем $R_{a1} = \frac{1}{4}R_{max} = 20$ а.е. , а $R_{a2} = \frac{3}{4}R_{max} = 60$ а.е.

Аналогично проводятся расчеты для нахождения расстояний в момент перицентра:

$$\frac{R_{p1}}{R_{p2}} = \frac{M_2}{M_1}$$

$$R_{p1} + R_{p2} = R_{min}$$

Подставляя величины в данные формулы получаем $R_{p1} = \frac{1}{4}R_{max} = 15$ а.е. , а $R_{p2} = \frac{3}{4}R_{max} = 45$ а.е.

Так как эксцентриситеты  орбит двух звезд совпадают, то можно найти его только для орбиты одной из звезд:

$$\frac{R_{a1}}{R_{p1}} = \frac{1+e}{1-e}$$

$$\frac{4}{3}(1-e) = 1+e$$

Из этого выражения находится эксцентриситет $e = \frac{1}{7} = 0{,}14$.

Можно было сразу рассмотреть движение одной звезды относительно другой и получить тот же самый ответ.

Большая полуось двойной системы ($a_1$) находится как половина суммы минимального и максимального расстояний.

$$a_1 = \frac{1}{2} * (R_{min} + R_{max})$$

$a_1$= 70 а.е.

Период обращения системы можно найти с помощью уточненного третьего закона Кеплера.

Сравним эту систему с системой Солнце-Земля.

$$\frac{(M_1 + M_2)}{(M_C + M_3)} * \frac{T_1^{\,2}}{T_3^{\,2}} = \frac{a_1^{\,3}}{a_3^{\,3}}$$

Выражая $T_1$, получаем

$$T_1 = T_3 * \sqrt{\frac{(M_C + M_3)}{(M_1 + M_2)} * \frac{a_1^3}{a_3^3}}$$

Если принять $a_3$=1 а.е. и $T_3$=1 год, то получается:
$T_1$=293 года.

6. Угловой размер звезды блеском 4,7 составляет 0,004 угл. сек. Спектроскопические наблюдения этой звезды показывают, что линия натрия с длиной волны 5890Å имеет две компоненты: яркую и слабую. Длина волны слабой компоненты меняется синусоидально с амплитудой 0,6Å и периодом 30 лет, причем один раз за этот период слабая линия исчезает на 230 дней. Оцените расстояние до звезды, ее массу и температуру поверхности. К какому типу звезд она относится?

**Решение:**
Данная звезда является спектрально-двойной. Слабая компонента линии натрия принадлежит звезде-спутнику. Исчезновения слабой линии указывают на то, что спутник периодически заходит за диск главной звезды, следовательно, мы находимся вблизи плоскости его орбиты. Предположим, что мы находимся точно в этой плоскости – оценочный характер задачи дает нам такое право. В этом случае синусоидальное изменение длины волны линии спутника указывает, что его орбита близка к круговой, а орбитальная скорость связана с амплитудой изменения длины волны линии спутника $\Delta\lambda$ соотношением: $v=c\Delta\lambda / \lambda$.

Получается, что скорость орбитального вращения спутника (30.5 км/с) близка к скорости орбитального вращения Земли. Умножив эту величину на продолжительность прохождения спутника за главной звездой, мы получаем диаметр главной звезды – 600 миллионов километров или 4 а.е., что в 500 раз больше диаметра Солнца. С Земли эта исполинская звезда видна как диск с диаметром 0,004”, из чего мы получаем расстояние до звезды -- 1 кпк. Зная ее видимую звездную величину, мы получаем ее абсолютную звездную величину: $m0=m+5-5lg\ r = -5.3$.

Светимость звезды в 10 000 раз больше светимости Солнца, а радиус превышает солнечный в 500 раз. Поток энергии с единицы площади данной звезды в 25 раз меньше, чем у Солнца, следовательно, по закону Стефана-Больцмана, температура поверхности звезды меньше солнечной в $25^{1/4}$ раз и составляет примерно 2700 К.

Для нахождения массы звезды сравним двойную систему с системой Солнце—Земля и будем считать массу спутника много меньшей массы звезды. Запишем обобщенный III закон Кеплера в относительных величинах: $a^3/T^2M = v^3T/M = const$.

Здесь $M$ – масса центрального тела, $a$ – радиус круговой орбиты, $T$ – период обращения и $v$ – орбитальная скорость спутника. Учитывая, что последняя из этих величин у Земли и звезды-спутника практически одинаковы, а период обращения звезды-спутника составляет 30 лет, получаем, что масса звезды равна 30 массам Солнца. Данная звезда представляет собой огромный и холодный красный сверхгигант.