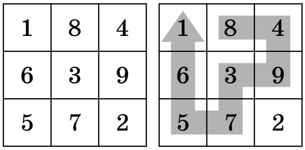
7 класс

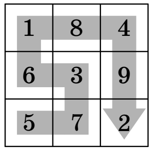
Задача 1. Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды.



Петя прошел, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше). [*4 балла*]

(*И. В. Ященко*)

Ответ. Наибольшее число, которое можно получить, — 573618492 (см. рис.).



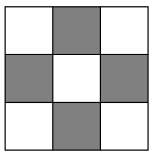
Комментарии. 1. Объясним, как задачу можно было бы решать (от участников этого не требовалось).

Заметим, что получить число, большее приведенного в условии, можно, начав обход с числа 9 (например, нетрудно получить число 94836572). Однако если обойти все клетки доски, то получится 9-значное число, которое, конечно, будет больше любого 8-значного.

И 9-значное число тоже тем больше, чем больше его первая цифра. Можно заметить, что 9-значного числа, начинающегося с 9, построить не удастся. И вообще, ни для какой из черных клеток (см. рис. ниже) не существует начинающегося в ней пути, проходящего по всем клеткам доски (см. следующий комментарий).

Поэтому наибольшее число получится, если начать с самой большой белой клетки, т. е. с цифры 5. Дальше надо перейти к ее наибольшему соседу, цифре 7, потом к ее наибольшему соседу, цифре 3. Но если дальше пойти в наибольшего соседа цифры 3, цифру 9, обойти все клетки квадрата не получится. Аналогично не надо идти в цифру 8. Поэтому из 3 надо ходить в 6. Далее путь единственен.

2. Раскрасив квадратик в шахматном порядке (см. рис.), объясним, почему нельзя обойти все клетки, начиная с черной. Действительно, ход из черной клетки всегда приводит в белую. Всего черных клеток четыре, поэтому белых клеток на любом таком пути тоже не более четырех — все пять белых клеток так не обойти.



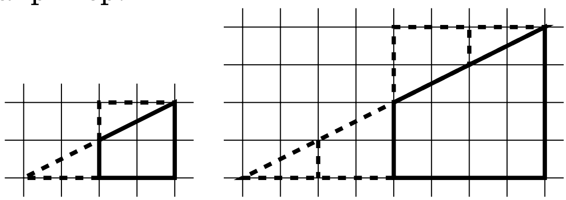
Задача 2. Квадрат разрезали на несколько частей. Переложив эти части, из них всех сложили треугольник. Затем к этим ча-

стям добавили еще одну фигурку — и оказалось, что и из нового набора фигурок можно сложить как квадрат, так и треугольник.

Покажите, как такое могло бы произойти (нарисуйте, как именно эти два квадрата и два треугольника могли бы быть составлены из фигурок). **[*4 балла*]**

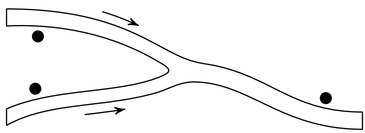
(*С. В. Маркелов, В. А. Клепцын*)

Ответ. Например:



Задача 3. См. задачу 4 для 6 класса.

Задача 4. На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а еще одна пристань стоит в двух километрах после слияния (см. рисунок). Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? (Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех ее частях. Собственная скорость лодки также постоянна.) **[*6 баллов*]** (*В. М. Гуровиц*)



Ответ. Либо за 24, либо за 72 минуты.

Решение. Обозначим пристани в порядке посещения A, B и C. Подумаем, какая из них могла стоять после слияния.

• Пристань B не могла стоять после слияния. Действительно, иначе лодка шла бы к ней 3 км по течению, а от нее — те же 3 км, но против течения. Но по условию время первой части пути больше, чем время второй.

• Пусть после слияния стоит пристань A. Тогда 1 км против течения лодка проходит за $30/3 = 10$ минут, а 1 км по течению — за $18 - 10 = 8$ минут. Соответственно, путь из C в A (3 км по течению) занимает $3 \cdot 8 = 24$ минуты.

• Наконец, пусть после слияния стоит пристань C. В этом случае 1 км по течению лодка проходит за $18/3 = 6$ минут, а 1 км против течения — за $30 - 6 = 24$ минуты. Соответственно, путь из C в A (3 км против течения) занимает $3 \cdot 24 = 72$ минуты.

Задача 5. Вася написал верное утверждение:

«В этой фразе 1/3 всех цифр — цифры 3, а 1/2 всех цифр — цифры 1».

А Коля написал фразу:

«В этой фразе 1/... всех цифр — цифры *, доли цифр * и * одинаковы и равны 1/..., а доля всех остальных цифр составляет 1/...».

Вставьте вместо звёздочек три разные цифры, а вместо многоточий — три разных числа так, чтобы получилось верное утверждение. **[*6 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. «В этой фразе 1/2 всех цифр — цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны 1/5, а доля всех остальных цифр составляет 1/10» (или «...доли цифр 0 и 2 одинаковы...» или «...доли цифр 0 и 5 одинаковы...»).

Решение. Объясним, как задачу можно было бы решать (от участников этого не требовалось).

Если какое-то из замененных многоточием чисел хотя бы трехзначное, то всего в этой фразе не менее 100 цифр, что невозможно (тогда одно из чисел состоит минимум из 30 знаков, но тогда всего цифр не менее 10^{30} и т. д. — ясно, что так быть не может). Поэтому все числа или однозначные, или двузначные, а цифр всего от 9 до 12.

Цифр «1» не менее 4, их доля не менее $4/12 = 1/3$, поэтому знаменатель первой дроби однозначный, т. е. цифр меньше 12.

Все знаменатели — делители количества цифр, большие единицы. Поэтому цифр не может быть ни 11 (у числа 11 нет отличных от единицы однозначных делителей), ни 9 (четыре слагаемых вида 1/3 и 1/9 в сумме не дадут 1).

Значит, всего цифр 10, а доля цифр «1» равна 1/2. Остальные дроби могут быть равны 1/5 и 1/10. Сумма долей должна быть равна 1: $1/2 + 1/5 + 1/5 + 1/10 = 1$. В знаменателях по разу встретились цифры 0, 2 и 5, любые две можно упомянуть явно, тогда их доля будет 1/5, а на долю единственной оставшейся цифры придется 1/10.

Задача 6. Победив Кащея, потребовал Иван золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привел его Кащей в пещеру и сказал:

«В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложи себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число. Когда новое перекладывание станет невозможным, сможешь унести свою суму со слитками».

Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кащей, если в сундуке исходно лежит а) 13; б) 14 золотых слитков? Как ему это сделать?

[*8 баллов за оба пункта, 5 баллов за один*]

(*А. В. Шаповалов*)

Ответ. а) 13; б) 13.

Решение. Иван будет действовать так, что каждый раз ход Кащея будет единственным: все остальные числа либо встречались на предыдущих ходах, либо слишком велики — у Ивана в этот момент нет столько слитков. Будем записывать ходы игры следующим образом: количество переложенных слитков (число слитков у Ивана после хода).

а) $+2$ (2), -1 (1), $+3$ (4), -4 (0), $+6$ (6), -5 (1), $+7$ (8), -8 (0), $+10$ (10), -9 (1), $+11$ (12), -12 (0), $+13$ (13).

В конце все возможные ходы сделаны, у Ивана все 13 слитков, значит, их он может забрать.

б) Будем действовать так же, как в предыдущем пункте. После хода «$+13$ (13)» не сделан только ход 14, но он невозможен, поэтому Иван может унести 13 слитков.

Докажем, что 14 слитков Иван унести не может. Допустим, в какой-то момент в сумке оказалось 14 слитков. Значит, в сундуке слитков нет, то есть последним сходил Иван. Но тогда всего сделано нечетное число ходов, и поэтому какое-то из чисел от 1 до 14 не встретилось. Кащей может сделать ход с этим числом, значит, уносить слитки пока нельзя.

Комментарий. Можно заметить, что для 17, 21 и вообще $4k+1$ слитка задача решается аналогично пункту а), а для 14, 18 и вообще $4k+2$ слитков — аналогично пункту б). Можно подумать над решением задачи и в оставшихся случаях (когда слитков $4k$ или $4k+3$).

Информация о наборе в 5—8 классы с углубленным изучением математики в 2012 году

Школа	Телефон	Адрес, URL	Классы	Сроки
2	(499) 137-17-69 (499) 137-69-31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская») www.sch2.ru	7, 8	с 23 марта по 25 мая
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная») moscowschool54.ru	8	с февраля по май
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая») sch57.msk.ru	8	с 21 марта по средам в 16^{00}
179	(495) 692-48-51	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд») www.179.ru	8	с 16 марта по пятницам в 16^{00}
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.») www.sch192.ru	5, 7; доб. в 8	с 6 апреля по пятницам в 16^{00}
218	(495) 976-63-45 (495) 976-19-85	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская») school218.ru	8 (ИУП), 5—7 (дифф.обр.)	апрель—май
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная») www.1543.ru	8	апрель
Интел- лектуал	(495) 445-52-10	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар») int-sch.ru	5; доб. в 7	рег. на сайте с января, собес. с марта

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте www.mccme.ru

---

X устная городская олимпиада по математике для 6—7 классов
состоится 9 марта 2012 года.

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований (текущего или прошлого учебного года):

- Математический праздник (13.02.11 или 19.02.12),
- IX городская устная олимпиада (13.03.11),
- Зимний турнир Архимеда (23.01.11 или 22.01.12),
- Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 3.04.11).

Для участия в олимпиаде необходимо предварительно зарегистрироваться до 27 февраля 2012 г. Подробности на сайте olympiads.mccme.ru/ustn/

Оперативная информация об олимпиадах — на сайте www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mccme.ru/matprazdnik/