LXXII Московская математическая олимпиада, 11 класс

1. Когда из бассейна сливают воду, уровень h воды в нём меняется в зависимости от времени t по закону

$$h(t) = at^2 + bt + c,$$

а в момент t_0 окончания слива выполнены равенства $h(t_0) = h'(t_0) = 0$. За сколько часов вода из бассейна сливается полностью, если за первый час уровень воды в нём уменьшается вдвое?

2. Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрел форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

3. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции

$$y = \sin x, \quad x \in (0; \alpha).$$

Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если: а) $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$; б) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$?

4. Через каждую вершину четырёхугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырёхугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвертая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырёхугольника, если один из них равен $72°$?

5. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

6. Докажите, что при любом разбиении ста «двузначных» чисел $00, 01, \ldots, 99$ на две группы некоторые числа хотя бы одной группы можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа этого ряда отличались друг от друга на 1, 10 или 11, и хотя бы в одном из двух разрядов (единиц или десятков) встречались все 10 различных цифр.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 04.04.2009.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 15 марта 2009 года

LXXII Московская математическая олимпиада, 11 класс

1. Когда из бассейна сливают воду, уровень h воды в нём меняется в зависимости от времени t по закону

$$h(t) = at^2 + bt + c,$$

а в момент t_0 окончания слива выполнены равенства $h(t_0) = h'(t_0) = 0$. За сколько часов вода из бассейна сливается полностью, если за первый час уровень воды в нём уменьшается вдвое?

2. Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрел форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

3. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции

$$y = \sin x, \quad x \in (0; \alpha).$$

Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если: а) $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$; б) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$?

4. Через каждую вершину четырёхугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырёхугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвертая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырёхугольника, если один из них равен $72°$?

5. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

6. Докажите, что при любом разбиении ста «двузначных» чисел $00, 01, \ldots, 99$ на две группы некоторые числа хотя бы одной группы можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа этого ряда отличались друг от друга на 1, 10 или 11, и хотя бы в одном из двух разрядов (единиц или десятков) встречались все 10 различных цифр.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 04.04.2009.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 15 марта 2009 года