МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2013-14: ОБЗОР ЗАДАЧ ПЕРВОГО РАУНДА НУЛЕВОГО ТУРА

О.Ю.Шведов

Первый раунд нулевого тура Московской олимпиады школьников по физике 2013-14 учебного года проходил 06 октября 2013 года (в отдельных регионах — 05 октября и 28 сентября) в очной форме на базе образовательных организаций. Олимпиада проходила на 107 площадках в 59 регионах России (из 83), а также в Беларуси и Казахстане.

Участникам олимпиады предлагалось решить 4 задачи за 2 часа 30 минут.

Олимпиадные варианты комплектовались следующим образом:

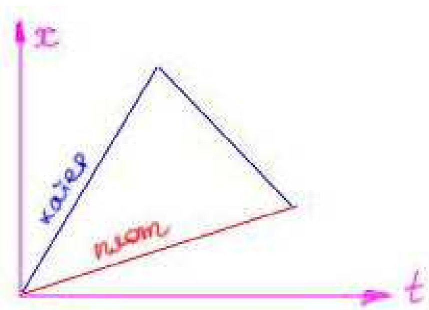
- √ 7-8 класс: задачи 1, 3, 6, 10;
- √ 9-10 класс: задачи 1, 7, 9, 10;
- √ 11 класс (варианты ABCDEF): задачи 1, 7, 4, 11;
- √ 11 класс (варианты GH): задачи 2, 7, 4, 12;
- √ 11 класс (варианты IJ): задачи 2, 8, 5, 12;
- √ 11 класс (варианты KLMN): задачи 2, 8, 5, 13.

Числовые значения величин и имена персонажей менялись от варианта к варианту.

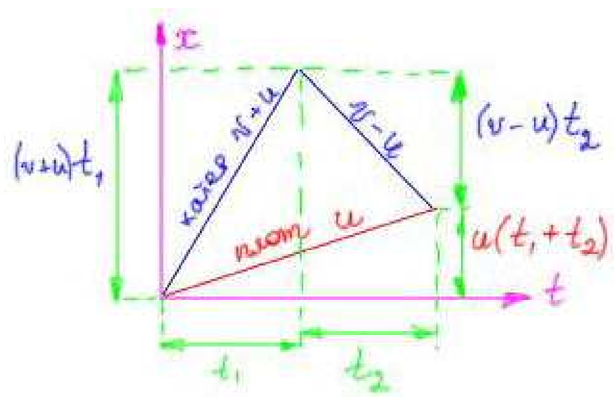
Ниже приводится обзор этих задач.

Задача 1 (7-11 классы). *На берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга расположены деревни Липовка и Демушкино. В 12.00 от Липовки к Демушкино стартовали плот и катер. Доплыв до Демушкино, катер развернулся и повернул обратно, встретившись с плотом в 14.00. Плот при этом проплыл 4 км. Постройте графики движения (зависимость расстояния до Липовки от времени) для плота и катера. В какой момент времени катер прибыл в Демушкино? Найдите скорость течения реки и скорость катера в стоячей воде, считая эти скорости постоянными.*
Вопрос о построении графиков в варианте для 7 класса не задавался

Возможное решение. Учитывая, что плот и катер отплыли в одном направлении, изобразим графики движения плота и катера (зависимость расстояния x до Липовки от времени t).



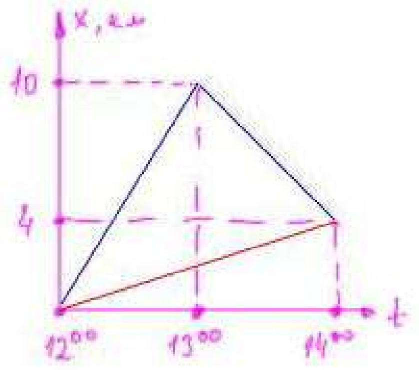
Почти все данные для построения данного графика приведены в условии задачи. Неясно только, в какой момент времени катер прибыл в Демушкино. Для ответа на этот вопрос введем обозначения: t_1 — время путешествия катера из Липовки в Демушкино, t_2 — время путешествия от Демушкино до встречи с плотом; u — скорость течения реки (это скорость плота), v — скорость катера в стоячей воде. Тогда скорость катера по течению будет равна $v+u$, а против течения $v-u$.



Обозначая расстояния на графике, составим уравнение: $(v+u)t_1 = u(t_1+t_2)+(v-u)t_2$, из него найдем, что $t_1 = t_2$. Следовательно, катер прибыл в Демушкино в момент времени точно посередине между 12.00 и 14.00, то есть в 13.00.

Теперь данных вполне достаточно для построения графиков движения (см. ответ). Из графиков найдем скорость плота, равную скорости течения реки (4 км:2 ч = 2 км/ч), скорости катера по течению (10 км:1 ч=10 км/ч) и против течения (6 км:1 ч=6 км/ч). Следовательно, скорость катера в стоячей воде составляет 8 км/ч.

Ответ. Катер прибыл в Демушкино в 13.00; скорость катера в стоячей воде 8 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Графики движения катера и плота приведены на рисунке.



Примечание. Свойство $t_1 = t_2$ также можно установить, перейдя в систему отсчета, связанную с плотом. В этой системе отсчета катер сначала отплывает от плота на некоторое расстояние, а затем с той же по величине скоростью приплывает к плоту. Время плавания «туда» равно при этом времени плавания «обратно».

Задача 2 (11 класс). *Заряженная частица А и нейтральная частица В движутся в вакууме в области, где имеются как поле тяжести (ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2), так и электрическое поле, направленное параллельно полю тяжести. Частицы стартуют из одной точки без начальной скорости. Достигнув скорости 400 м/с, частица А влетела в область пространства, где направление электрического поля изменилось на противоположное, а его величина осталась неизменной. Спустя 10 секунд с момента старта расстояние между частицами достигло максимума и начало уменьшаться. Постройте графики зависимости скоростей частиц А и В от времени в первые 10 секунд после старта. В какой момент времени изменилось направление напряженности электрического поля? Укажите этот момент на графике.*

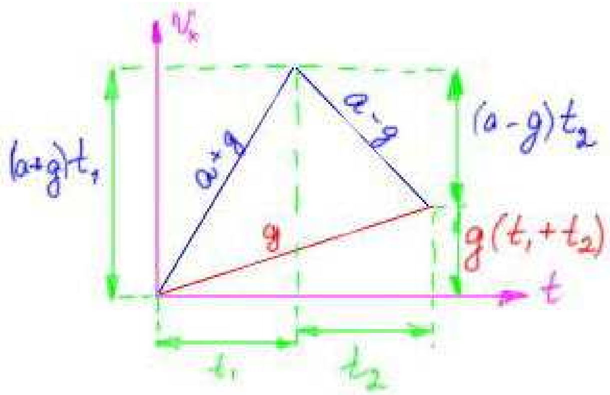
Возможное решение. Направим ось x вдоль вектора ускорения свободного падения. Тогда нейтральная частица будет двигаться равноускоренно, а ее проекция скорости на ось x будет линейно зависеть от времени $v_x(t) = gt$. График зависимости v_x от t для этой частицы является прямой линией.

На зараяженную частицу (масса m, заряд q) будут действовать силы тяжести mg и электрическая сила qE_x. Ее ускорение будет определяться из второго закона Ньютона $ma_x = mg + qE_x$; оно равно $a_x = g + qE_x/m$.

Предполагая, что в начальный момент времени $qE_x > 0$, построим график зависимости v_x от t для данной частицы. Сначала частица движется с положительным ускорением $a_x = a+g$, где $a = qE/m$, затем — с отрицательным ускорением $a_x = -(a-g)$.

Отметим, что расстояние между частицами начинает уменьшаться, когда относительная скорость частиц обращается в нуль. Поэтому графики $v_x(t)$ для заряженной и нейтральной частиц приходят в одну точку.

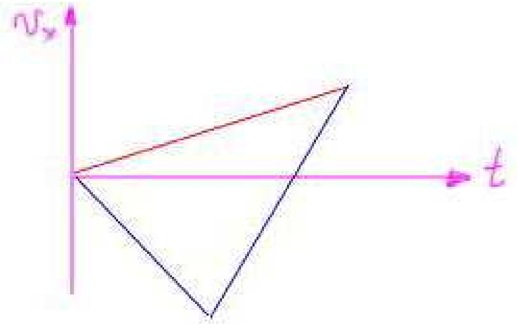
Из условия задачи неясен момент изменения направления напряженности электрического поля. Поэтому обозначим через t_1 продолжительность движения заряженной частицы до данного изменения, через t_2 — после изменения.



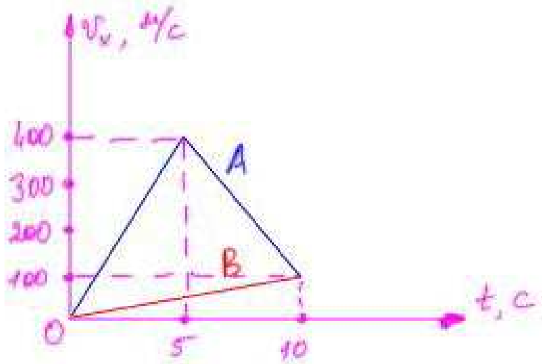
Обозначая на графике изменения скоростей частиц на разных участках, составим уравнение: $(a+g)t_1 = g(t_1+t_2) + (a-g)t_2$; из него получим $t_1 = t_2$. Таким образом, изменение направления напряженности электрического поля произошло точно посередине между начальным и конечным моментами времени, то есть через 5 секунд после старта.

Теперь полученных данных достаточно для построения графика (см. ответ).

Отметим, что в задаче возможен и второй случай, когда $qE_x < 0$. В этом случае графики зависимости $v_x(t)$ для частиц изображены на рисунке; вывод об изменении направления напряженности поля в момент времени 5 секунд остается в силе.



Ответ. Графики зависимостей скоростей частиц от времени приведены на рисунке. Направление поля изменилось через 5 секунд после старта.

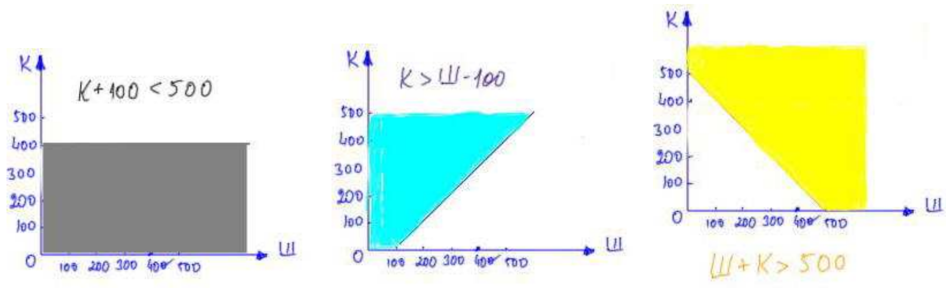


Задача 3 (7-8 классы). *Школьница Алиса проводит опыты по измерению масс кубика и шарика при помощи равноплечих рычажных весов и гирь. Алиса обнаружила, что кубик вместе с гирей «100 г» весят больше шарика, шарик и кубик вместе весят больше гири «500 г», а гиря «500 г» весит больше гири «100 г» вместе с кубиком. В каких пределах может быть заключена масса кубика, с которым работает Алиса? А масса шарика?*

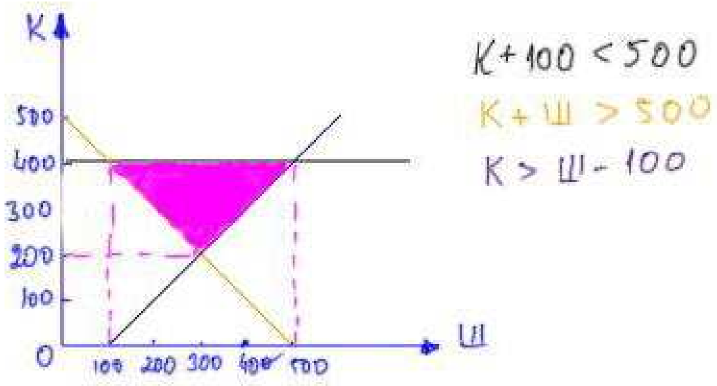
Возможное решение. Обозначим через К массу кубика в граммах, через Ш — массу шарика в граммах. Условие задачи можно записать в виде системы неравенств:

$$К + 100 > Ш, \qquad К + Ш > 500, \qquad К + 100 < 500.$$

Изобразим эти неравенства на графике в виде закрашенных областей, откладывая по одной оси массу кубика (в граммах), а по другой — массу шарика (в граммах).



Поскольку должны выполняться все три условия, возьмем пересечение этих областей:



Приходим к ответу.

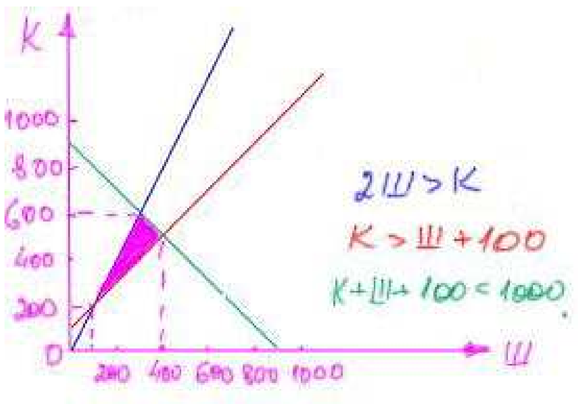
Ответ. Масса шарика может лежать в промежутке от 100 г до 500 г, масса кубика — от 200 г до 400 г.

Задача 4 (11 класс). *Школьница Алиса проводит опыты по измерению масс кубика и двух одинаковых шариков при помощи равноплечих рычажных весов и гирь. Алиса обнаружила, что два шарика вместе весят больше одного кубика, кубик — больше шарика и гири «100 г», а кубик, шарик и гиря «100 г» — меньше гири «1 кг». В каких пределах может быть заключена масса кубика, с которым работает Алиса? А масса шарика?*

Возможное решение. Обозначим через К массу кубика в граммах, через Ш — массу шарика в граммах. Условие задачи можно записать в виде системы неравенств:

$$2Ш > К, \qquad К > Ш + 100, \qquad К + Ш + 100 < 1000.$$

Изобразим эту систему неравенств на графике в виде закрашенной области, откладывая по одной оси массу кубика (в граммах), а по другой — массу шарика (в граммах).



Приходим к ответу.

Ответ. Масса шарика может лежать в промежутке от 100 г до 400 г, масса кубика — от 200 г до 600 г.

Задача 5 (11 класс). *Школьницы Алиса и Василиса хотят оценить температуру воды в калориметрах. Термометров у них нет. Смешав 100 г воды из своего калориметра и 100 г воды из ведра, где находилась смесь воды и льда, Василиса обнаружила, что полученная смесь холоднее воды в калориметре у Алисы. Смешав 200 г воды из своего калориметра и 100 г воды из чайника с кипящей водой, Алиса обнаружила, что данная смесь холоднее, чем вода в калориметре у Василисы. В каких пределах может изменяться температура в калориметре у Алисы? А в калориметре у Василисы? В каких пределах может изменяться разность температуры в калориметре Алисы и температуры в калориметре Василисы?*

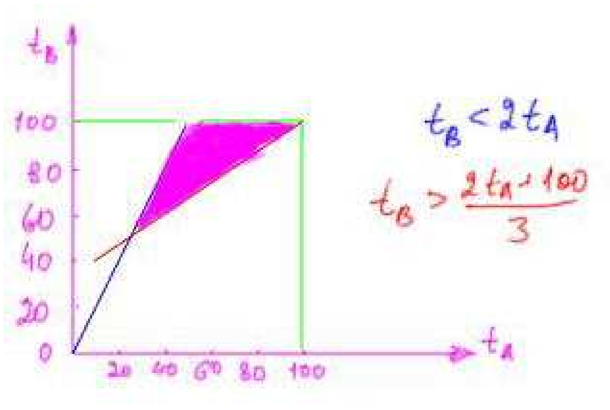
Возможное решение. В решении используется формула для температуры смеси t_c порции воды массы m_1 и температуры t_1 с порцией воды массы m_2 и температуры t_2. Эту формулу можно получить из уравнения теплового баланса. Первая порция воды (удельная теплоемкость c) получает количество теплоты $cm_1(t_c - t_1)$, вторая — количество теплоты $cm_2(t_c - t_2)$, сумма этих количеств теплоты равна нулю: $cm_1(t_c - t_1) + cm_2(t_c - t_2) = 0$ и

$$t_c = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

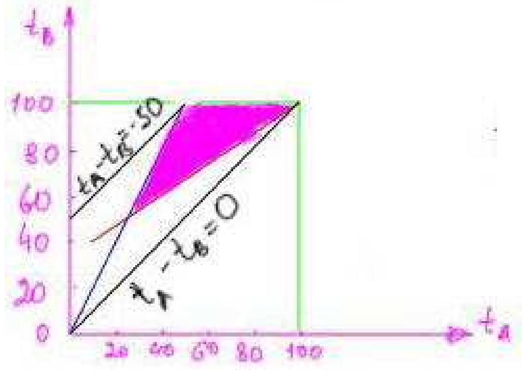
Обозначая через t_A температуру в калориметре Алисы (в градусах Цельсия), а через t_B — температуру в калориметре Василисы (в градусах Цельсия) и используя формулу для температуры смеси, запишем условие задачи в виде неравенств:

$$\frac{t_B + 0}{2} < t_A, \qquad \frac{2t_A + 100}{3} < t_B.$$

Изобразим эту систему неравенств на графике в виде закрашенной области, откладывая по одной оси t_A, а по другой — t_B.



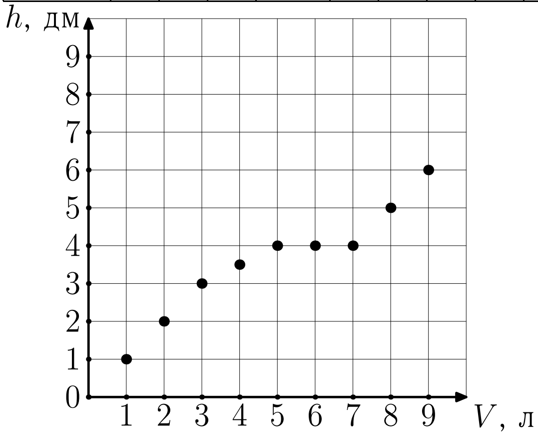
Из данного графика находим границы возможных температур в каждом из калориметров (см. ответ). Из графика также вытекает, что область возможных значений температур располагается в полосе $-50 < t_A - t_B < 0$ (между прямыми $t_A - t_B = -50$ и $t_A - t_B = 0$).



Ответ. Температура в калориметре Алисы может быть в интервале от $25°C$ до $100°C$, температура в калориметре Василисы — в интервале от $50°C$ до $100°C$. Температура в калориметре Василисы выше, чем температура в калориметре Алисы; модуль разности температур может быть в промежутке от $0°C$ до $50°C$.

Задача 6 (7-8 классы). *Школьник Вася проводит опыты с сосудом сложной формы. Наливая сверху в сосуд воду, Вася исследует зависимость высоты h установившегося уровня воды (в дециметрах) в сосуде от количества налитой воды V (в литрах). Полученные Васей результаты измерений представлены на графике, изображенном на рисунке, и в таблице:*

V, л	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h, дм	1	2	3	3,5	4	4	4	5	6

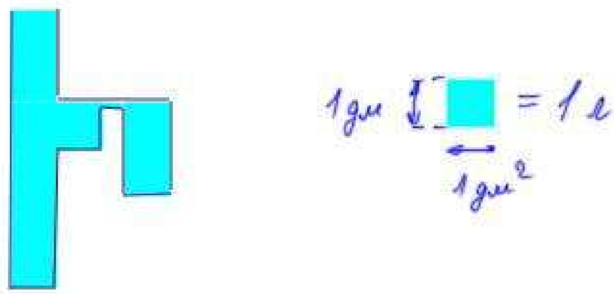


Нарисуйте сосуд, с которым мог проводить свой опыт Вася. Укажите на рисунке размеры сосуда.

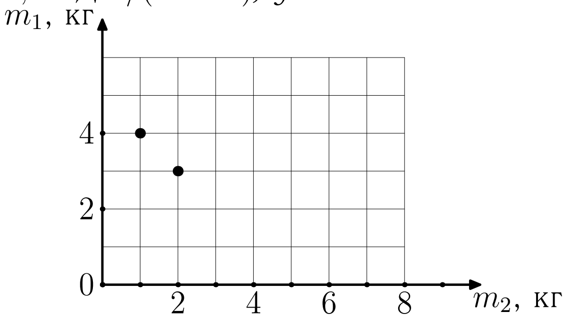
Таблица приводилась в варианте для 7 класса, график — в варианте для 8 класса.

Возможное решение. Поскольку в начале высота уровня воды пропорциональна объему налитой воды, площадь сечения сосуда внизу может быть постоянной. Начиная с высоты 3 дм, площадь сечения сосуда увеличивается в два раза. На высоте 4 дм в сосуде должно располагаться отверстие, через которое может выливаться 2 литра воды. Выше отверстия площадь поперечного сечения сосуда может быть такой же, как и внизу. Приходим к ответу.

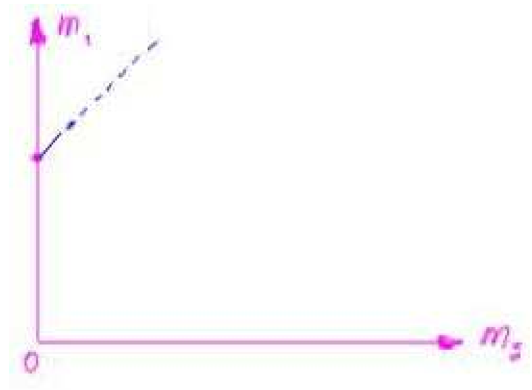
Ответ. Возможная форма сосуда изображена на рисунке:



Задача 7 (9-11 класс). *В калориметре имеется льдинка массой 4 кг. Школьница Алиса наливает в калориметр воду и исследует, сколько льда оказывается в калориметре после установления равновесия. Алиса нанесла два своих экспериментальных результата на диаграмму, демонстрирующую зависимость массы m_1 льда в калориметре в конце процесса от массы m_2 воды, налитой в калориметр. Постройте график зависимости m_1 от m_2. При какой массе m_2 масса m_1 будет максимальной? Чему равно максимально возможное значение m_1? При каких значениях массы m_2 масса m_1 обратится в нуль? Чему равны начальные температуры льдинки и воды, которую Алиса наливала в калориметр? Удельная теплоемкость воды $4,2$ кДж/(кг $\cdot$ °C), удельная теплоемкость льда $2,1$ кДж/(кг $\cdot$ °C), удельная теплота плавления льда 336 кДж/кг.*



Возможное решение. Когда количество наливаемой воды является небольшим, она вся намораживается на льдинку. На данном этапе масса m_1 складывается из начальной массы $m_0 = 4$ кг и массы m_2: $m_1 = m_0 + m_2$. Изобразим эту зависимость на графике:



Когда температура образовавшейся льдинки станет равна 0°C, льдинка начнет таять. При добавлении воды (удельная теплоемкость c) массой Δm_2 при температуре $t_{\text{В}}$ (в градусах Цельсия) льдинка (удельная теплота плавления λ) будет получать количество теплоты $c\Delta m_2 \cdot t_{\text{В}}$, и лед массой $c\Delta m_2 \cdot t_{\text{В}}/\lambda$ превратится в воду. Поэтому на втором участке график зависимости m_1 от m_2 будет прямой с отрицательным угловым коэффициентом

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta m_2} = -ct_{\text{В}}/\lambda.$$

Наконец, на третьем этапе весь лед расплавится, и график будет совпадать с прямой $m_1 = 0$.

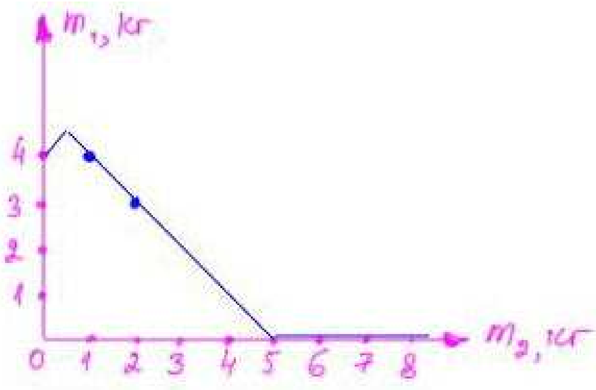
Таким образом, искомый график является ломаной линией, состоящей из отрезка прямой с угловым коэффициентом, равным единице; отрезка прямой с отрицательным угловым коэффициентом и горизонтальной линии $m_1 = 0$. Учитывая две экспериментальные точки, приходим к окончательному графику (см. ответ).

Из графика видно, что максимальное значение m_1 достигается при $m_2 = 0,5$ кг. Это максимальное значение равно 4,5 кг. Масса m_1 обращается в нуль, когда m_2 не меньше 5 кг.

Температуру воды найдем из формулы для углового коэффицента на втором участке: по графику угловой коэффициент прямой равен -1, отсюда $t_В = 80°C$.

Найдем начальную температуру льдинки. При охлаждении и замерзании воды массой $m_2 = 0,5$ кг выделяется количество теплоты $(ct_В + \lambda)m_2$. Оно идет на нагревание льдинки массой $m_0 = 4$ кг и удельной теплоемкостью $c_Л$ на $\Delta t = m_2(ct_В + \lambda)/(c_Л m_0) = 40°C$. Поскольку именно при данном значении m_2 льдинка нагревается до $0°C$, начальная температура льдинки равна $-40°C$.

Ответ. График зависимости m_1 от m_2 изображен на рисунке:



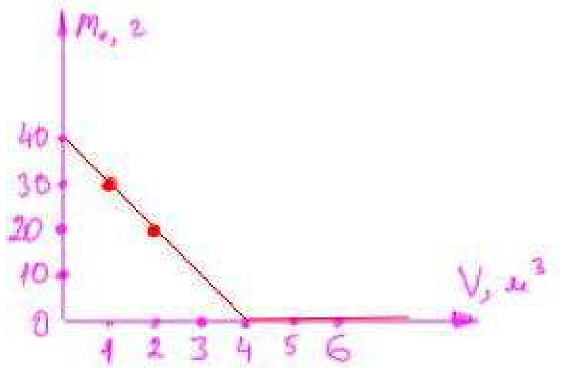
Максимальное значение m_1, равное 4,5 кг, достигается при $m_2 = 0,5$ кг. Масса m_1 обращается в нуль, когда m_2 не меньше 5 кг. Начальная температура воды $80°C$, льда $-40°C$.

Задача 8 (11 класс). *Школьник Владислав проводит изотермический процесс над влажным воздухом в цилиндре, измеряя зависимость массы воды m_1 в жидком состоянии от объема системы V. Владислав нанес на график две измеренные им экспериментальные точки: (V=1 м^3; m_1=30 г) и (V=2 м^3; m_1=20 г). Достройте данный график. Какова общая масса воды (в жидком и газообразном состояниях) в цилиндре? Какова плотность насыщенного водяного пара при данной температуре?*

Возможное решение. Когда в сосуде имеется вода в жидком состоянии, водяной пар в этом сосуде является насыщенным, с плотностью ρ. Следовательно, масса воды в газообразном состоянии равна ρV. Обозначая общую массу воды через m_0, находим массу воды в жидком состоянии в зависимости от объема: $m_1 = m_0 - \rho V$. Эта зависимость является линейной (см. график в ответе). Начиная с некоторого значения объема, воды в жидком состоянии не будет.

Как вытекает из графика, общая масса воды составляет 40 г. При объеме 4 м^3 она вся оказывается в газообразном состоянии, и водяной пар еще остается насыщенным. Следовательно, плотность насыщенного водяного пара 40 г : 4 м^3 = 10 г/м^3.

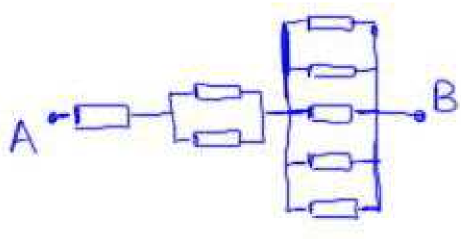
Ответ. График зависимости m_1 от V изображен на рисунке:



Общая масса воды составляет 40 г, плотность насыщенного водяного пара 10 г/м^3.

Задача 9 (9-10 классы). *Имеются 10 резисторов сопротивлением 1 кОм. Нарисуйте схему электрической цепи, сопротивление которой как можно ближе к 1,7 кОм. Укажите на рисунке два вывода цепи, которые будут подсоединяться к прибору для измерения сопротивлений. Чему равно сопротивление Вашей цепи?*

Ответ. Возможная схема электрической цепи, сопротивление которой точно равно 1,7 кОм, изображена на рисунке.



Задача 10 (7-10 классы). *Космонавты Ирина, Карина и Марина расположились на космической базе вдали от небесных тел. Ирина говорит: «Чтобы сообщить космическому кораблю массой в одну тонну скорость 1 км/с, надо запастись тонной горючего». Сколько топлива потребуется Ирине, чтобы сообщить кораблю массой в две тонны скорость 1 км/с? Сколько топлива потребуется Карине, чтобы сообщить кораблю массой в одну тонну скорость n км/с (в частности 3 км/с)? Сколько топлива потребуется Марине, чтобы сообщить кораблю массой в одну тонну скорость 1 км/с, а затем затормозить его?*
Скорость ракеты Карины n км/с приводилась в варианте для 10 класса, скорость 3 км/с — в варианте для 7-9 классов

Возможное решение. Разогнать космический корабль массой 2 т до 1 км/с — все равно, что разогнать два космических корабля массой 1 т до 1 км/с. Поэтому потребуется 2 т топлива.

Перейдем теперь к более сложному вопросу разгона корабля массой 1 т до n км/с. Если речь идет о разгоне со скорости $(n-1)$ км/с до скорости n км/с (на 1 км/с), потребуется 1 т топлива. Но разгонять от скорости $(n-2)$ км/с до скорости $(n-1)$ км/с надо будет уже 2 т (1 т полезной нагрузки и 1 т топлива) — поэтому потребуется 2 т горючего. Учтем топливо, требуемое для разгона корабля на различных этапах, в таблице:

Этап разгона	Нужно разгонять массу, т	Требуется топлива, т
от $(n-1)$ км/с до n км/с	1	1
от $(n-2)$ км/с до $(n-1)$ км/с	2	2
от $(n-3)$ км/с до $(n-2)$ км/с	4	4
...	...	...
от 0 км/с до 1 км/с	2^{n-1}	2^{n-1}

Как видно из таблицы, начальная масса корабля с топливом составляет 2^n т, из них 1 т полезной нагрузки и (2^n-1) т топлива.

Чтобы разогнать корабль до 1 км/с и потом затормозить, требуется столько же топлива, сколько для разгона до 2 км/с (два раза надо сообщить скорость 1 км/с), — это 3 т.

Ответ. Для разгона корабля массой 2 т до 1 км/с потребуется 2 т топлива. Для разгона корабля массой 1 т до n км/с требуется (2^n-1) т топлива. В частности, для разгона корабля массой 1 т до 3 км/с требуется 7 т топлива. Чтобы разогнать корабль массой 1 т до 1 км/с и затем затормозить, требуется 3 т топлива.

Задача 11 (11 класс). *Школьник Владислав проводит опыты по разрядке конденсатора через резистор. В инструкции к приборам Владислав прочитал: «Если зарядить конденсатор до заряда 1 мКл, то за секунду через резистор пройдет заряд 0,2 мКл». Определите, какой заряд пройдет через данный резистор при разрядке конденсатора, заряженного до 1 мКл, за две секунды, за три секунды и за n секунд.*

Возможное решение. Проходящий через резистор электрический заряд пропорционален заряду на конденсаторе. Из условия задачи вытекает, что конденсатор, заряженный до заряда q, за секунду уменьшит свой заряд на $0,2q$ — останется заряд $0,8q$. Таким образом, каждую секунду заряд конденсатора мзменяется в 0,8 раз.

Спустя n секунд заряд на конденсаторе станет равен $0,8^n$ мКл; следовательно, через резистор пройдет заряд $(1-0,8^n)$ мКл. Подставляя значения $n=2$ и $n=3$, получаем ответы в частных случаях.

Ответ. За две секунды через резистор пройдет электрический заряд 0,36 мКл, за три секунды — 0,488 мКл, за n секунд — $(1-0,8^n)$ мКл.

Задача 12 (11 класс). *Светофильтр поглощает 20 процентов энергии падающего на него света, остальной свет пропускает, ничего не отражает. Какая доля падающей энергии поглотится в «стопке» из двух светофильтров, стоящих один за другим? А в стопке из трех светофильтров? В стопке из n светофильтров?*

Возможное решение. По условию, светофильтр пропускает 0,8 от падающей энергии. Следовательно, стопка из n светофильтров пропускает долю $0,8^n$ от падающей энергии и поглощает долю $(1-0,8^n)$. Подставляя значения $n=2$ и $n=3$, получаем ответы в частных случаях.

Ответ. Стопка из двух светофильтров поглощает долю энергии 0,36, стопка из трех светофильтров — 0,488, из n светофильтров — $(1-0,8^n)$.

Задача 13 (11 класс). *За год из 4 г радиоактивного вещества распадается 1 г. Сколько граммов из 4 г этого вещества распадется за два года? А за три года? За n лет?*

Возможное решение. По условию, за год распадается 1/4 радиоактивного вещества. Поэтому количество радиоактивного вещества каждый год изменяется в 3/4 раза. За n лет количество радиоактивного вещества изменится в $(3/4)^n$ раз и составит $(3/4)^n \cdot 4$ г. Распадется $4 \cdot (1-(3/4)^n)$ г. Подставляя значения $n=2$ и $n=3$, получаем ответы в частных случаях.

Ответ. За два года распадется 1,75 г, за три года 2,3125 г, за n лет $4 \cdot (1-(3/4)^n)$ г.