



VIII ЗАОЧНАЯ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

ЗАДАНИЯ

I. Эссе

**1. «Семнадцать мгновений весны».** В знаменитом романе Юлиана Семенова «Семнадцать мгновений весны» советский разведчик Отто фон Штирлиц едет по лесу после сеанса связи с центром. Начинается бомбежка. Штирлиц, который имеет математическое образование, рассуждает следующим образом.

*«Поехали, машинка», – подумал он по-русски и включил радио. Передавали легкую музыку. Во время налетов обычно передавали веселые песенки. Это вошло в обычай: когда здорово били на фронте или сильно долбали с воздуха, радио передавало веселые, смешные программы. «Ну, едем, машинка. Быстро поедем, чтобы не попасть под бомбу. Бомбы чаще всего попадают в неподвижные цели. Поедем со скоростью семьдесят километров – значит, вероятность попадания уменьшится именно в семьдесят раз...»*

Подумайте над рассуждением Штирлица. В чем Штирлиц прав, в чем неправ? Какие более правдоподобные рассуждения вы могли бы предложить? Может быть, нужно изменить скорость, ехать задним ходом или вообще не двигаться? Напишите все, что вы придумаете по данному вопросу.



**2. Оценка качества.** В большом городе было 2000 самых разных школ – больших и не очень. Однажды Отдел Оценок Главного Управления решил провести Оценку Качества Знаний, то есть – контрольную работу. Оценку назначили на сентябрь и сделали случайную выборку из 20 школ, посчитав, что в них учится примерно 1% всех школьников. Это было в мае.

Когда в августе сотрудники Отдела вернулись из отпуска, они обнаружили, что за время их отдыха Служба Слияния и Оптимизации объединила школы самым разным образом – некоторые школы остались в неизменном виде, некоторые объединились по две в одну, некоторые – по три, и т.п. Всего получилось 1000 школ. При этом случилось так, что никакие две отобранные для Оценки школы не слились в одну. Отдел решил, что ничего страшного не произошло – если какая-то из отобранных школ объединилась с другой школой, то вся эта новая школа будет участвовать в Оценке. В Отделе посчитали, что поскольку теперь отобрано 20 случайных школ из 1000, теперь в Оценке будет участвовать примерно 2% всех учащихся города. Когда же вопрос изучили подробнее, то обнаружилось, что в действительности в отобранных школах учится не 2%, а 10% всех учащихся города! И выделенных денег на такую Оценку не хватит. Как могло такое произойти? Подумайте над возможными причинами такого явления. Какие из них наиболее правдоподобны? Попробуйте построить «модель города и школ в этом городе» и на примере этой модели показать, каким образом слияние школ может так резко изменить долю участников Оценки. Напишите небольшое эссе по результатам своих исследований.



**3. Фальшивая случайность.** Известный ученый, лауреат премии Филдса<sup>1</sup>, Станислав Смирнов иногда проводит со своими студентами такой эксперимент.

Первой группе студентов профессор Смирнов предлагает 100 раз бросить монету. Когда выпадает орел, нужно записать 1, когда решка – 0. Получается случайная последовательность нулей и единиц. Ради иллюстрации мы тоже решили бросить монету 100 раз. Вот что у нас получилось:

1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1  
1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1  
1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1  
1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1  
1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1

А вторая группа студентов должна, не бросая монету, просто придумать случайную последовательность длины 100 из нулей и единиц.

Профессор Смирнов сказал, что всегда сможет отличить настоящую случайную последовательность, полученную бросанием монеты, от фальшивой последовательности, которую студенты придумали. Правда, потом профессор Смирнов подумал и добавил: «Ну, хорошо. Почти всегда. По крайней мере, до сих пор я ни разу не ошибся».

Каким образом профессор Смирнов может отличить последовательности? Почему он добавил «почти всегда»?

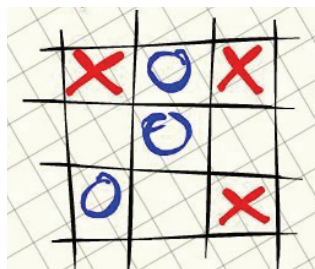
Проведите такие эксперименты с помощью родителей, друзей, одноклассников. Попробуйте сами отличить придуманные случайные последовательности от настоящих. Напишите эссе по этому поводу и не забудьте подумать про «почти».

## II. Задачи

**Каждая задача требует полного и обоснованного решения. У Вас месяц. Не спешите. Постарайтесь изложить свои мысли полно, но без лишних слов**

**4. Соседи (от 6 класса. 1 балл).** Имеются карточки с натуральными числами от 1 до 5. Карточки хорошо перемешали и наугад выбирают две штуки. Найдите вероятность того, что на выбранных карточках окажутся два последовательных числа.

<sup>1</sup> Филдсовская премия (англ. Fields Medal) — международная премия и медаль, которые вручаются один раз в 4 года на каждом международном математическом конгрессе двум, трем или четырем молодым математикам.



**5. Крестики-нолики (от 6 класса. 1 балл).** Поле для игры в крестики-нолики (три на три клетки) случайным образом заполняют шестью крестиками и тремя ноликами. Найдите вероятность того, что все три нолика окажутся «в выигрышной позиции», то есть в один ряд по вертикали, по горизонтали или по диагонали.

**6. Жребий.** В колоде 36 игровых карт четырех мастей от шестерки до туза. Володя и Маша тянут по одной карте. Сначала тянет карту Володя, а затем Маша. Маша выиграет, если она вытащит карту старше, чем карта Володи. Иначе выигрывает Володя.

а) (от 6 класса. 1 балл). Докажите, что жребий несправедливый.

б) (от 6 класса. 1 балл). Как сделать его справедливым?

**7. Акция.** Магазин «Крокус и Кактус» объявил акцию: если покупатель берет три товара, то самый дешевый из них ему достается бесплатно. Покупатель взял десять товаров, все разной цены: за 100 рублей, за 200 рублей, за 300 рублей и так далее – самый дорогой товар стоил 1000 рублей.

а) (от 6 класса. 1 балл). Какова наименьшая сумма, которую покупатель заплатит, если удачно разложит свои покупки перед кассиром?

б) (от 6 класса. 1 балл). Какова наибольшая сумма, которую покупатель заплатит, если неудачно разложит покупки?

в) (от 9 класса. 3 балла). Найдите математическое ожидание суммы, которую покупатель заплатит, если разложит покупки случайным образом.

**8. Укорачивание.** Имеется последовательность из 2015 цифр. Все цифры выбирались из множества от 0 до 9 случайным образом независимо друг от друга. В полученной последовательности производится следующая операция. Если несколько одинаковых цифр идут подряд, то их заменяют одной такой же цифрой. Например, если был фрагмент ...044566667..., то вместо него получится ...04567....

а) (от 7 класса. 1 балл). Найдите вероятность того, что последовательность укоротится ровно на одну цифру.

б) (от 8 класса. 1 балл). Найдите математическое ожидание длины новой последовательности.

**9. Упрямые квадраты (от 7 класса. 2 балла).** Даны 100 чисел. К каждому из них прибавили 2. Сумма квадратов чисел не изменилась. К каждому полученному числу еще раз прибавили число 2. Как изменилась сумма квадратов теперь?

**10. Футбол (от 7 класса. 4 балла).** Футбольный матч продолжается 90 минут. Ничья возможна. Что более вероятно в таком матче: что общее число заброшенных мячей будет четным или что оно окажется нечетным?



**11. Похожие события.** Если бросают игральную кость, то событие  $A = \{1, 2, 3\}$  состоит в том, что выпала одна из граней 1, 2 или 3. Аналогично, событию  $B = \{1, 2, 4\}$  благоприятствуют грани 1, 2 и 4.

Игральную кость бросили 10 раз. Известно, что событие  $A$  осуществилось ровно 6 раз.

а) (от 8 класса. 2 балла) Найдите вероятность того, что при этом условии событие  $B$  не произошло ни разу.

б) (от 9 класса. 3 балла) Найдите математическое ожидание случайной величины  $X$  «Количество осуществлений события  $B$ ».

**12. Десятичная дробь (от 8 класса. 2 балла)** Имеется последовательность из тысячи случайных цифр. Перед этой последовательностью поставили ноль и десятичную запятую. Получилось случайное число  $X$ , записанное десятичной дробью:  $X = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_{1000}$ . Найдите  $EX$ .

**13. Тест (от 8 класса. 3 балла)** Вася и Миша выполняли тест, в котором было 20 вопросов одинаковой сложности и к каждому вопросу даны варианты ответов. Поскольку ни Вася, ни Миша ничего не знали, они только угадывали ответы. Вася угадал верные ответы на 6 вопросов, а Миша – на 8 вопросов, не советуясь с Васей. Найдите математическое ожидание числа совпадений, то есть вопросов, где Вася и Миша оба угадали верные ответы или не угадали.



**14. Пилюли (от 9 класса. 2 балла).** У Рассеянного Ученого болела коленка. Доктор прописал ему 10 пилюль от коленок: принимать по одной пилюле ежедневно. Пилюли помогают в 90% случаев, а в 2% случаев наблюдается побочное действие – исчезает рассеянность, если была.

Другой доктор прописал Ученому пилюли от рассеянности – тоже по одной в день 10 дней подряд. Эти пилюли излечивают рассеянность в 80% случаев, но в 5% случаев есть побочный эффект – перестают болеть коленки.

Баночки с пилюлями похожи, и когда Ученый уехал в десятидневную командировку, он взял с собой одну баночку, но совершенно не обратил внимания – какую. Десять дней он принимал по пилюле в день и вернулся совершенно здоровым. И рассеянность прошла, и коленка не болит. Найдите вероятность того, что Ученый взял с собой пилюли от рассеянности.

**15. Загадочный зверь (от 9 класса. 2 балла).** Ровно половина населения острова Невезения – зайцы, а все остальные – кролики. Если житель острова Невезения что-нибудь утверждает, он всегда искренне верит в то, что говорит. При этом зайцы добросовестно заблуждаются в среднем в каждом четвертом случае, а кролики добросовестно заблуждаются в среднем в каждом третьем случае. Однажды в центр острова вышел зверь и закричал: «Я не заяц!». Подумал и грустно сказал: «Я не кролик». Какова вероятность того, что он все же заяц?



**16. Чередующиеся группы (от 9 класса. 3 балла)** Последовательность состоит из  $k$  нулей и  $m$  единиц, расположенных в случайном порядке. Разобьем последовательность на чередующиеся группы нулей и единиц (группа – участок, состоящий из всех одинаковых цифр, стоящих подряд)<sup>2</sup>. Общее число групп – случайная величина. Найдите ее математическое ожидание.

**17. Полоса удачи (от 9 класса. 4 балла).** Монету бросают  $n$  раз. Полосой удачи длины  $k$  назовем последовательность из  $k$  выпавших подряд орлов. Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях монеты самая длинная полоса удачи будет иметь длину 4.



**18. Светофор (от 10 класса. 2 балла).** Светофор на пешеходном переходе одну минуту разрешает переходить улицу, а две минуты – запрещает. Найдите среднее время ожидания зеленого света пешеходом, который подошел к перекрестку.

**19. Футбол-2. (от 10 класса. 6 баллов)** Идет обычный футбольный матч. Ничья возможна. Время ожидания очередного гола не зависит от предыдущих событий матча. Известно, что математическое ожидание общего числа голов в футбольных матчах этих команд равно 2,8. Найдите вероятность того, что в течение матча будет забито четное число голов.

<sup>2</sup> Например, последовательность 00011011100 состоит из пяти групп 000, 11, 0, 111 и 00.