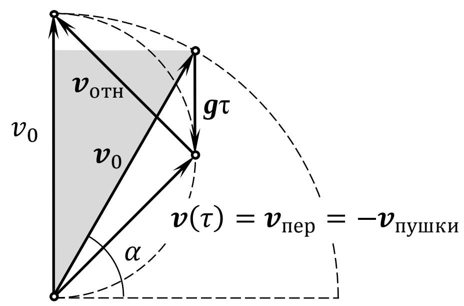
Заочное задание (декабрь) состоит из пяти задач. За решение каждой задачи участник получает до *4 баллов* по результатам автоматической проверки ответов и до *6 баллов* на основании проверки развёрнутого ответа. Всего участник может получить до *50 баллов.*

Задача 1. Ракета удаляется от поверхности Земли с постоянной скоростью $v_0 = 200$ м/с, направленной строго вертикально. Из неподвижного орудия под углом α к горизонту выпускается снаряд с такой же по величине начальной скоростью v_0. В каком диапазоне должен лежать угол α, чтобы в системе отсчёта, движущейся поступательно вместе со снарядом, скорости ракеты и орудия хотя бы в какой-то момент времени были взаимно перпендикулярны? Сопротивлением воздуха пренебречь. Поверхность Земли считать плоской.

Возможное решение. Из рисунка видно, что угол α должен лежать в диапазоне от 60° (включительно) до 90° (не включительно) (на рисунке диапазон изображён серой штриховкой). При $\alpha = 60°$ имеем



$$g\tau = v_0 \sin\alpha - \frac{v_0}{2} = v_0\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right),$$

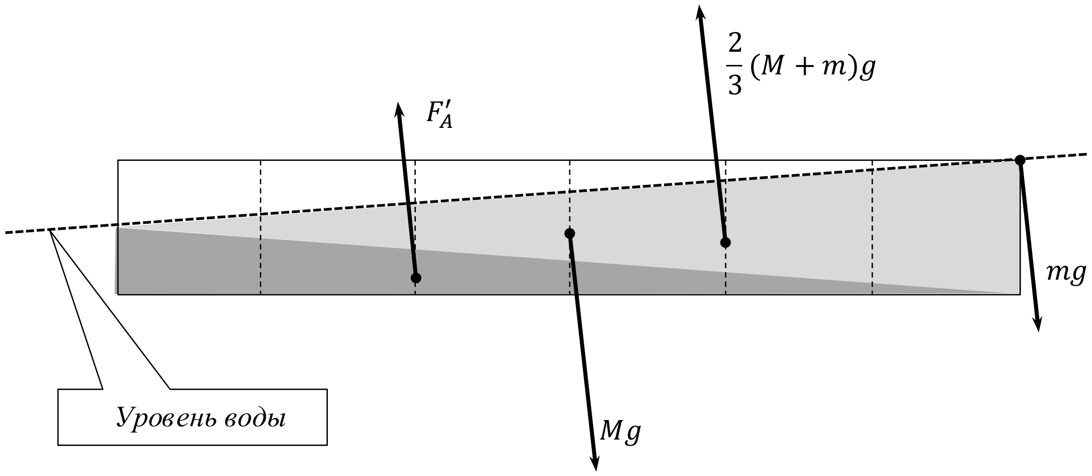
откуда

$$\tau = \frac{v_0}{g}\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0}{2g}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 7{,}5 \text{ с}.$$

Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За решение, доведённое до правильного ответа, но с недочётами в доказательстве участник получает *4 балла*. Если участник не довёл решение до правильного ответа, он может получить до *2 утешительных баллов* по следующим основаниям: правильное использование закона сложения скоростей или формул для криволинейного равноускоренного движения.

Задача 2. Посередине длинной доски массой $M = 4$ кг сидит ворона. Доска при этом на три четверти погружена в воду. После того как ворона пересела на один из её концов, верхний край доски с этого конца опустился как раз до уровня воды (нижний край доски по-прежнему полностью погружен в воду). Найдите массу вороны.

Возможное решение. Так как длина доски много больше её толщины, угол наклона доски очень мал. На рисунке изображены силы для случая, когда ворона пересела на один из концов доски.



Светло-серая часть доски имеет вдвое меньший объем, чем у всей доски, значит, на эту часть действует сила Архимеда, равная $\frac{2}{3}(M+m)g$ (так как в первом случае, когда ворона сидела посередине доски, доска была на три четверти погружена в воду), а точка приложения этой силы расположена на расстоянии трети доски от её правого конца (см. рисунок). Точка приложения силы Архимеда, действующей на оставшуюся погруженную часть доски, отстоит от левого конца также на треть. Запишем уравнение моментов относительно точки приложения силы F_A':

$$Mg\cdot\frac{1}{6}l+mg\cdot\frac{4}{6}l-\frac{2}{3}(M+m)g\cdot\frac{1}{3}l=0\ \Rightarrow\ m=\frac{M}{8}=0{,}5\text{ кг},$$

где l – длина доски, m – масса вороны.

Запишем уравнение моментов относительно точки приложения силы $\frac{2}{3}(M+m)g$ (см. рисунок):

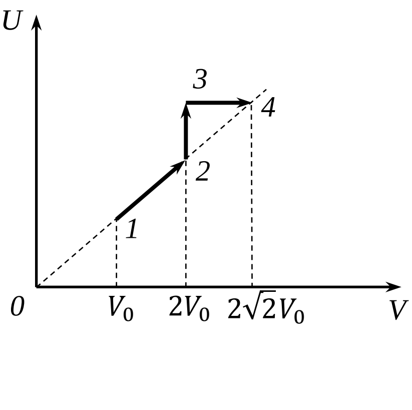
$$(Mg)\cdot\frac{1}{6}l-mg\cdot\frac{1}{3}l-F_A'\cdot\frac{1}{3}l=0\ \Rightarrow\ F_A'=\frac{3}{8}Mg.$$

Значит, суммарная сила Архимеда, действующая на доску, равна

$$F_A=F_A'+\frac{2}{3}(M+m)g=\frac{3}{8}Mg+\frac{2}{3}(M+m)g=\frac{27}{24}Mg\cong 44\text{ Н}.$$

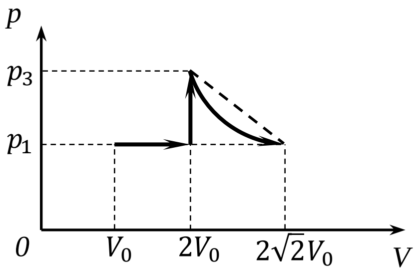
Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За решение, доведённое до правильного ответа, но с недочётами в доказательстве участник получает *4 балла*. Если участник не довёл решение до правильного ответа, он может получить до *2 утешительных баллов* по следующим основаниям: правильное использование закона Архимеда или правила моментов.

Задача 3. Зависимость внутренней энергии идеального газа от объёма указана на рисунке. На каком из участков совершённая работа максимальна?



Возможное решение. Изобразим процесс на pV-диаграмме (см. рисунок). Работа газа на участке 1–2 (изобара) равна $A_{12}=p_1V_0$, а на участке 2–3 (изохора) равна нулю. Работу на изотермическом участке 3–4 оценим сверху как площадь трапеции (площадь под отрезком жирной штриховой линии):

$$A_{34} < (p_1 + p_3)(\sqrt{2} - 1)V_0.$$



Из уравнения состояния для точек 3 и 4 находим, что $p_3 = \sqrt{2}p_1$. Стало быть, $A_{34} < p_1 V_0$. Следовательно, работа газа максимальна на участке 1–2.

Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За решение, доведённое до правильного ответа, но с недочётами в доказательстве участник получает *4 балла*. Если участник не довёл решение до правильного ответа, он может получить до *2 утешительных баллов* по следующим основаниям: правильно перерисован график процесса на pV-диаграмму.

Задача 4. Три маленьких шарика находятся в космосе в углах правильного треугольника со сторонами длиной R. Шарики имеют массы m, $100m$, $100m$. Их электрические заряды равны соответственно $100q$, q, q. В начальный момент скорости шариков равны нулю. Какими будут скорости этих шариков через очень большое время?

Возможное решение. В начальном состоянии энергия взаимодействия шариков равна

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(q \cdot \left[k\frac{100q}{R} + k\frac{q}{R}\right] + q \cdot \left[k\frac{100q}{R} + k\frac{q}{R}\right] + 100q \cdot \left[k\frac{q}{R} + k\frac{q}{R}\right]\right) = 201k\frac{q^2}{R}$$

(шарики маленькие, следовательно, их собственная энергия в процессе движения не поменяется).

Так как масса шарика с зарядом $100q$ много меньше масс двух остальных шариков, он улетит на далёкие расстояния очень быстро (два остальные не успеют разогнаться), поэтому из закона сохранения энергии получаем

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + k\frac{q^2}{R} \;\Rightarrow\; v_1 = \frac{10q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 mR}},$$

где v_1 – скорость шарика с зарядом $100q$.

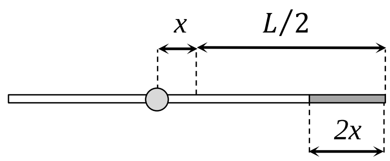
Запишем закон сохранения энергии для двух оставшихся шариков:

$$k\frac{q^2}{R} = 2 \cdot \frac{100mv_2^2}{2} \;\Rightarrow\; v_2 = \frac{q}{20\sqrt{\pi\varepsilon_0 mR}},$$

где v_2 – скорости шариков с зарядами q.

Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За решение, доведённое до правильного ответа, но с недочётами в доказательстве участник получает *4 балла*. Если участник не довёл решение до правильного ответа, он может получить до *2 утешительных баллов* по следующим основаниям: правильное использование закона сохранения энергии или формулы для электростатической энергии взаимодействия зарядов.

Задача 5. Гладкий стержень длины L и массы M находится в невесомости. На стержень надета маленькая бусинка, масса которой гораздо меньше массы стержня. Определите период малых колебаний бусинки вблизи центра стержня. Гравитационная постоянная равна G.



Возможное решение. Когда бусинка отклонена от положения равновесия на малое расстояние x, то в силу симметрии со стороны «белой» части стержня не действует сил (см. рисунок), а со стороны кусочка длиной *2x* действует сила, равная $G\frac{m\left(\frac{2x}{L}M\right)}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$, где m – масса бусинки. Запишем 2-й закон Ньютона для бусинки:

$$m\ddot{x} = -G\frac{m\left(\frac{2x}{L}M\right)}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \left(G\frac{8M}{L^3}\right)x = 0,$$

откуда получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{8GM}} = \pi\sqrt{\frac{L^3}{2GM}}.$$

Критерии оценок развёрнутого решения. За полное решение задачи участник получает *6 баллов*. За решение, доведённое до правильного ответа, но с недочётами в доказательстве участник получает *4 балла*. Если участник не довёл решение до правильного ответа, он может получить до *2 утешительных баллов* по следующим основаниям: правильное использование закона всемирного тяготения.

Автоматическая проверка ответов

Задание 1. 7,5

Задание 2. 44

Задание 3. 1000

Задание 4. 340

Задание 5. 201

Задание 6. 6

Задание 7. 1,07