X ЗАОЧНАЯ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ
ОСНОВНОЙ ТУР. 19 ДЕКАБРЯ 2016 Г. – 22 ЯНВАРЯ 2017 Г.

Ответы и решения

I. Эссе

1. Сколько в стране стульев? Илья Ильф и Евгений Петров посвятили статистике вступление к одной из глав романа «Двенадцать стульев».

«От статистики не скроешься никуда… Она… знает даже, сколько в стране статистиков. И одного она не знает. Не знает она, сколько в СССР стульев. Стульев очень много».

Найдите способ оценить число стульев в России в настоящее время. Эта задача относится к так называемым «вопросам Ферми». Ферми – американский физик, который любил озадачивать своих студентов, предлагая им оценить количество чего-нибудь без исходных данных. Исходя только из опыта и здравого смысла. Наиболее известный вопрос Ферми: сколько в мире настройщиков пианино. Мы не спрашиваем про настройщиков пианино. Наш вопрос более будничный: сколько в России стульев?

Возможная идея эссе. Разумеется, можно исходить из того, сколько стульев в среднем приходится на одного гражданина России, а также на гостей нашей Родины. При этом можно учитывать стулья в кафе, присутственных местах, школах и т.п. При этом, вероятно, приходится учитывать, что «общественные стулья» служат не одному, а многим людям. Например, в школе на одном и том же стуле сидят разные школьники. Участники олимпиады подходили к задаче по-разному. У них получились разные оценки от 300 до почти 800 млн. стульев. Эти величины одного порядка, что внушает оптимизм – истинное значение должно быть недалеко.

2. Теорема о бесконечных обезьянах. Если посадить обезьяну за пишущую машинку и заставить ее случайно и беспорядочно бить по клавишам, то рано или поздно она напечатает любой наперед заданный текст.
https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_бесконечных_обезьянах

С помощью несложных расчётов можно оценить вероятность того, что обезьяна, начиная с определённого момента, нажмёт подряд все нужные буквы в нужном порядке.

Предположим, что такой эксперимент проводится в России и в Англии. У первой обезьяны клавиатура с русскими буквами и знаками препинания, а у второй – клавиатура с латинскими буквами и знаками препинания. От обезьяны из России ждут полный текст романа «Преступление и наказание», а от обезьяны из Англии – текст перевода этого романа на английский язык. Какая обезьяна, скорее всего, справится быстрее? Если возможно, оцените время, которое потребуется каждой обезьяне. Все нужные дополнительные предположения сделайте самостоятельно.

Возможные идеи. Разумеется, все участники обратили внимание на то, что в русском алфавите 33 буквы (32, если не считать букву ё, которую Достоевский почти или совсем не использовал), а в английском – только 26 букв. Другое соображение – средняя длина предложений в английском языке несколько меньше, чем в русском, несмотря на обилие вспомогательных глаголов. «Коэффициент укорачивания» можно найти в интернете – исследований на эту тему было немало. Можно было либо сделать самостоятельные оценки с помощью Google или Yandex-переводчиков. К сожалению, среди присланных эссе мы пока не нашли количественных оценок, но может быть, еще найдем.

3. Систематическая ошибка выжившего. Вы не знаете что это? Узнайте:

https://ru.wikipedia.org/wiki/Систематическая_ошибка_выжившего

Ошибок выжившего гораздо больше, чем примеров, которые можно найти в интернете. Люди совершают подобные ошибки постоянно. Попробуйте найти и описать свой пример. Чем подробнее вы опишете ситуацию и объясните, в чем ошибочность заключений – тем интереснее. Может быть, вы сумеете исправить ошибку выжившего для вашей ситуации подобно тому, как это сделал Абрахам Вальд.

На тему ошибки выжившего мы получили несколько эссе, но, к сожалению, ярких примеров среди них мы пока не нашли. Никто не обратил внимания на содержание учебников по ОБЖ, которые советуют как вести себя в той или иной ситуации. Очень часто эти советы базируются как раз на ошибках выжившего.

II. Задачи

4. Солнечная долина (от 6 класса, 1 балл). В Солнечной долине 10 посёлков. Однажды статистики долины провели исследование численности жителей в посёлках. Обнаружили следующее.

1. Число жителей в любых двух посёлках долины отличается не более чем на 100 человек.
2. В посёлке Знойное ровно 1000 жителей, что превышает среднюю численность населения посёлков долины на 90 человек.

Сколько жителей в посёлке Радужный, который также расположен в Солнечной долине?

Решение. Пусть x – общее число жителей во всех остальных поселках, кроме Знойного. Тогда средняя численность равна

$$\frac{1000+x}{10}=100+0{,}1x=910\text{, откуда } x=8100.$$

Значит, средняя численность населения в 9 посёлках, кроме Знойного, равна 900 человек. Если в Радужном больше 900 жителей, то должен быть поселок, в котором меньше 900 жителей, но тогда число жителей в Радужном отличается от числа жителей Знойного больше чем на 100. Противоречие. Следовательно, в Радужном не больше 900 жителей. Очевидно, что в Радужном не менее 900 жителей. Значит, их ровно 900.

Ответ: 900.

5. Разноцветные шары (от 6 класса, 1 балл). В красном ящике 100 красных шаров, а в зелёном ящике – 100 зелёных шаров. Восемь красных шаров переложили в зелёный ящик, а потом столько же шаров переложили из зелёного ящика в красный. Шары в ящиках хорошенько перемешали. Что теперь больше: вероятность вытащить наудачу из красного ящика зелёный шар или из зелёного ящика красный?

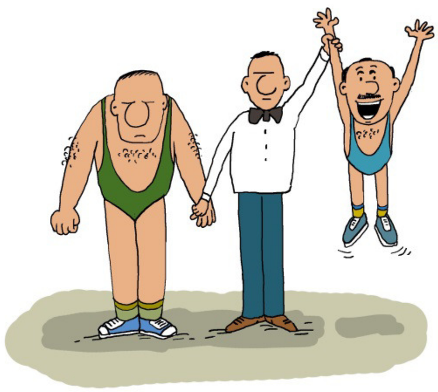
Решение. После того, как все шары переложили, в каждом ящике по-прежнему по 100 шаров. Значит, сколько красных шаров в зелёном ящике, столько же зелёных в красном.

Ответ: вероятности равны.

6[1]. Турнир. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. В любом поединке двух борцов всегда побеждает тот, кто сильнее. В первом туре борцы разбились на случайные пары и провели поединки. Для второго тура борцы ещё раз разбиваются на случайные пары соперников (может случиться, что какие-то пары повторятся). Приз получает тот, кто выиграет оба поединка. Найдите:

а) **(от 6 класса, 1 балл)** наименьшее возможное число призёров турнира;

б) **(от 8 класса, 2 балла)** математическое ожидание числа призеров турнира.



[1] Сюжет задачи предложен Борисом Френкиным

Решение. Пронумеруем борцов от самого слабого №1 до самого сильного №100.

а) Покажем, что может случиться так, что призёром будет только один борец – сильнейший из всех. Если в первом туре борцы разбились на пары следующим образом:

$$(1;2),(3;4),(5;6),...,(99;100),$$

то все нечётные борцы проиграли в первом туре. Если теперь во втором туре борцы разобьются следующим образом:

$$(2;3),\ (4;5),(6;7),...,(98;99),(1;100),$$

то проиграют все чётные борцы, кроме борца № 100. Таким образом, он и будет единственным призёром всего турнира.

б) Пусть I_k – индикатор события «k-й борец выиграл оба поединка». Вероятность победить соперника в каждом поединке для k-го борца равна вероятности того, что его соперником оказался один из тех $k-1$ борцов, что слабее. Значит, вероятность победы равна $\frac{k-1}{99}$. Вероятность победить оба раза равна $\left(\frac{k-1}{99}\right)^2$, поэтому

$$\mathrm{E}\,I_k=\left(\frac{k-1}{99}\right)^2.$$

Общее количество призёров X равно сумме всех индикаторов при $1\le k\le 100$, откуда

$$\mathrm{E}\,X=\mathrm{E}\,I_1+\mathrm{E}\,I_2+...+\mathrm{E}\,I_{100}=\left(\frac{0}{99}\right)^2+\left(\frac{1}{99}\right)^2+...+\left(\frac{99}{99}\right)^2=\frac{0^2+1^2+2^2+...+99^2}{99^2}.$$

Сумму в числителе можно упростить, пользуясь формулой Архимеда:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Получаем: $\mathrm{E}\,X=\frac{99\cdot 100\cdot 199}{6\cdot 99^2}=\frac{100\cdot 199}{6\cdot 99}\approx 33{,}5$.

Ответ: а) 1; б) 33,5.

7. Что? Где? Когда? Игровой круг в телевикторине разбит на 13 одинаковых секторов. Секторы пронумерованы числами от 1 до 13. В каждом секторе в начале игры лежит конверт с вопросом. Игроки выбирают случайный сектор с помощью волчка со стрелкой. Если этот сектор уже выпадал прежде, то конверта в нём уже нет, и тогда играет следующий по часовой стрелке сектор. Если он тоже пуст, – следующий и т.д., пока не встретится непустой сектор. До перерыва игроки разыграли 6 секторов.

а) **(от 6 класса. 1 балл)** Что более вероятно: что в числе разыгранных есть сектор № 1 или что среди разыгранных есть сектор № 8?

б) **(от 7 класса. 5 баллов)**. Найдите вероятность того, что в результате оказались разыграны подряд шесть секторов с номерами от №1 до №6.

Решение. а) Вероятности равны, поскольку ни один сектор не имеет преимуществ перед другим.

б) Рассмотрим последовательность секторов $n_1,n_2,...,n_6$, выпавших при вращении волчка. Событию A «разыграны секторы №1 – №6» благоприятствуют все последовательности, в которых $n_k\le k$, и все перестановки каждой такой последовательности. Например, подходит последовательность $1,1,2,3,3,6$ и её всевозможные перестановки $3,2,3,1,1,6$, $6,1,3,2,1,3$ и т.д.

Количество последовательностей, благоприятствующих A, не зависит от количества невыбранных секторов, а значит, одинаково для любого круга, в котором больше шести секторов. Удобно пересчитать эти последовательности на круге с семью секторами. Тогда, какова ни была бы последовательность выпавших секторов, останется всего один неразыгранный сектор, а разыгранные секторы расположены подряд. Всего последовательностей 7^6. Последовательностей, при которых не разыгран именно сектор №7, ровно в 7 раз меньше: 7^5.

Вернемся к большому кругу. На нем всего 13^6 равновозможных последовательностей. Поэтому вероятность события A равна $\frac{7^5}{13^6} \approx 0,00348$.

Ответ: $7^5/13^6$ или приближенно $0,00348$.

8. Самоотвод (от 6 класса, 2 балла). В школьном совете выбирают председателя. Кандидатов четверо: А, Б, В и Г. Предложена специальная процедура – каждый член совета должен записать на специальном листке кандидатов в порядке своих предпочтений. Например, АВГБ значит, что член совета на первое место ставит А, не очень возражает против В и считает, что он лучше, чем Г, зато меньше всего хотел бы видеть председателем Б.

Первое место даёт кандидату 3 очка, второе – 2 очка, третье – 1 очко, а четвертое – 0 очков. После сбора всех листков избирательная комиссия суммирует очки у каждого кандидата. Победит тот, у кого наибольшая сумма очков.

После голосования выяснилось, что В (который набрал меньше всех очков) снимает свою кандидатуру в связи с переходом в другую школу. Заново голосовать не стали, а просто вычеркнули В из всех листков. В каждом листке осталось три кандидата. Поэтому первое место стало стоить 2 очка, второе – 1 очко, а третье – 0 очков. Очки просуммировали заново.

Могло ли случиться так, что кандидат, который прежде имел больше всех очков, после самоотвода В получил меньше всех? Если могло, приведите пример, как могли распределиться голоса. Если так быть не могло, объясните, почему.

Член совета	3	2	1	0
1	А	В	Б	Г
2	А	В	Б	Г
3	А	В	Б	Г
4	Г	Б	А	В
5	Г	Б	А	В
6	Г	Б	А	В
7	Г	Б	А	В

Член совета	2	1	0
1	А	Б	Г
2	А	Б	Г
3	А	Б	Г
4	Г	Б	А
5	Г	Б	А
6	Г	Б	А
7	Г	Б	А

Решение. Такое возможно. Предположим, что в совете голосовали семеро, и голоса распределились, как показано в таблице. Очки распределились следующим образом:

А – 13, Б – 11, В – 6, Г – 12.

Больше всех набрал кандидат А, меньше всех – кандидат В.

Когда В снял свою кандидатуру, таблица предпочтений изменилась, поскольку строки укоротились за счёт исчезновения В. Суммы очков тоже изменились:

А – 6, Б – 7, Г – 8.

Странным образом кандидат с самым низким рейтингом изменил результаты выборов, просто перестав в них участвовать, а лидер стал аутсайдером[2].

Ответ: да, могло.

[2] Подробно этот и другие парадоксы выборов и знаменитая теорема Эрроу описаны в книге «Математика выборов» (Р.Э.Клима, Дж.К.Ходж. Москва, МЦНМО, 2007 в переводе Н.А.Шиховой.

9[3]. Бабушкины пирожки. В одном пакетике два пирожка с капустой, в другом два с вишней, в третьем – один с капустой и один с вишней. Выглядят и весят пирожки одинаково, так что неизвестно, какой с чем. Внуку в школу нужно дать один пирожок. Бабушка хочет дать пирожок с вишней, но она сама запуталась в своих пирожках и определить начинку может, только надломив пирожок. Надломленный пирожок внук не хочет, он хочет целый.

а) **(от 7 класса, 1 балл).** Покажите, что бабушка может действовать так, что вероятность дать внуку целый пирожок с вишней будет равна 2/3.

б) **(от 7 класса, 2 балла).** Существует ли стратегия, при которой вероятность дать внуку целый пирожок с вишней выше, чем 2/3? Если да – найдите эту стратегию. Если нет – докажите её отсутствие.

Решение. а) *Пусть бабушка надломит случайный пирожок. Если он с капустой, то нужно дать внуку любой пирожок из любого другого пакетика. Если надломленный пирожок с вишней, то дать внуку второй пирожок из этого же пакетика.*

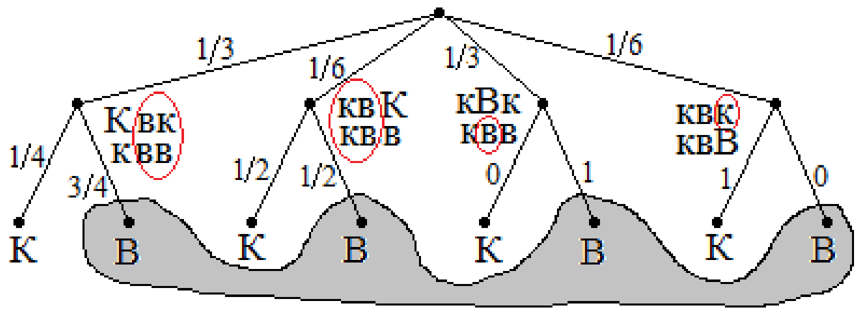
Покажем, что в этом случае вероятность дать внуку пирожок с вишней равна 2/3. Обозначим пакетики КК, КВ и ВВ в соответствии с их содержимым.

Надломленный пирожок может оказаться с капустой из пакетика КК (вероятность 1/3), либо это может быть пирожок с капустой из пакетика КВ (вероятность 1/6). В первом случае любой другой пирожок будет с вишней с вероятностью 3/4, а во втором случае – с вероятностью 1/2.

Надломленный пирожок может оказаться с вишней либо из пакетика ВВ (вероятность 1/3), либо из пакетика КВ (вероятность 1/6). В первом случае второй пирожок из того же пакетика окажется с вишней с вероятностью 1, во втором – с вероятностью 0. Полная вероятность того, что внук получит пирожок с вишней, равна

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 0=\frac{2}{3}.$$

Понять все проделанные рассуждения поможет дерево эксперимента, на котором изображены все вероятности (см. рис.).



На рисунке большие буквы означают выбранный пирожок, овалами обведены множества, из которых делается случайный выбор пирожка для внука. Событие «внуку достался пирожок с вишней» закрашено.

б) *Пусть бабушка надламывает по одному случайному пирожку из каждого пакетика по очереди. Как только будет надломлен пирожок с вишней из какого-то пакетика, нужно дать внуку второй пирожок из этого же пакетика.*

Покажем, что вероятность дать внуку пирожок с вишней в этом случае равна 3/4. Пирожок с капустой внук получит только в одном из двух случаев. Либо бабушка открыла пакетик ВК и надломила пирожок В (вероятность этого равна $1/3\cdot 1/2=1/6$), либо бабушка открыла пакетик КК, надломила один из пирожков, потом взяла пакетик ВК и надломила

---

[3] Автор Евгений Смирнов

пирожок В (вероятность этого равна $1/3\cdot 1/2\cdot 1/2 = 1/12$). Значит, внук получит пирожок с капустой с вероятностью $1/6 + 1/12 = 1/4$, а с вишней – с вероятностью $3/4 > 2/3$.

Недостаток этого метода – риск переломать половину пирожков. Нам не удалось найти стратегию, дающую вероятность выше $3/4$. Будем рады, если кто-нибудь сумеет.

10. Вороны (от 7 класса, 2 балла). На берёзе сидели белые и чёрные вороны – всего их было 50. Белые точно были, но чёрных было не меньше, чем белых. На дубе тоже сидели белые и чёрные вороны, и было их всего 50. На дубе чёрных тоже было не меньше, чем белых или столько же, а может быть, даже на одну меньше. Одна случайная ворона перелетела с берёзы на дуб, а через некоторое время другая (хотя, может быть, та же самая) случайная ворона перелетела с дуба на берёзу. Что более вероятно: что количество белых ворон на берёзе стало таким же, как было сначала, или что оно изменилось?

Решение. Предположим, что на берёзе было a белых и b чёрных ворон, а на дубе – c белых и d чёрных. Вероятности перелётов чёрных и белых ворон с берёзы на дуб и обратно изобразим с помощью дерева. Точка S – начало, событие B – перелёт черной вороны, событие W – перелёт белой.

Событие A «численность белых ворон восстановилась» отмечена закрашенной областью, куда ведут цепочки SBB и SWW. Вероятность этого

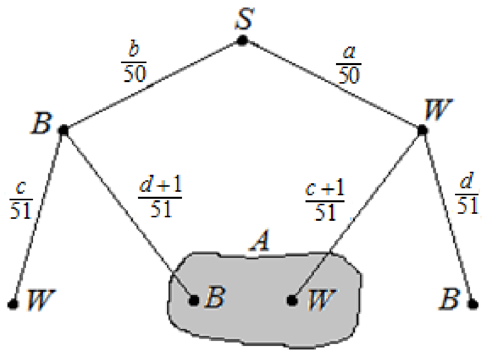
$$\mathrm{P}(A) = \frac{b}{50}\cdot\frac{d+1}{51} + \frac{a}{50}\cdot\frac{c+1}{51} = \frac{bd+ac+a+b}{50\cdot 51}.$$

Вероятность противоположного события «Численность изменилась» получается сложением вероятностей вдоль цепочек SBW и SWB:

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{b}{50}\cdot\frac{c}{51} + \frac{a}{50}\cdot\frac{d}{51} = \frac{bc+ad}{50\cdot 51}.$$

Решим вопрос, какая из этих вероятностей больше:

$$\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{bd+ac+a+b}{50\cdot 51} - \frac{bc+ad}{50\cdot 51} = \frac{bd-bc+ac-ad+a+b}{50\cdot 51} = \frac{(b-a)(d-c)+a+b}{50\cdot 51}.$$



По условию $b-a \ge 0$ и $d-c \ge -1$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{(b-a)(d-c)+a+b}{50\cdot 51} \ge$$
$$\ge \frac{a-b+a+b}{50\cdot 51} = \frac{2a}{50\cdot 51} > 0.$$

Ответ: более вероятно, что число белых ворон станет прежним.

11. Друзья-полярники (от 8 класса. 2 балла). На антарктической станции n полярников, все разного возраста. С вероятностью p между каждыми двумя полярниками завязываются дружеские отношения, независимо от других симпатий или антипатий. Когда зимовка заканчивается и наступает пора разъезжаться по домам, в каждой паре друзей старший даёт младшему дружеский совет. Найдите математическое ожидание числа тех, кто так и не получил ни одного дружеского совета.

Решение. Дадим полярниками номера от 1 до n в соответствии с возрастом – чем старше, тем номер меньше. Полярник с номером j может получить советы от $j-1$ полярников старше него. Поэтому он не получит ни одного совета, только если не дружит ни с кем из них. Вероятность этого $(1-p)^{j-1}$. Поэтому событие «полярник j вообще не получил советов» имеет индикатор I_j с математическим ожиданием $\mathrm{E}\,I_j=(1-p)^{j-1}$. Общее число полярников, не получивших ни одного совета, равно

$$I_1+I_2+\ldots+I_n.$$

Перейдём к математическому ожиданию:

$$\mathrm{E}\left(I_1+\ldots+I_n\right)=(1-p)^0+(1-p)+(1-p)^2+\ldots+(1-p)^{n-1}=\frac{1-(1-p)^n}{p}.$$

Ответ: $\dfrac{1-(1-p)^n}{p}$.

12. Бал (от 8 класса. 3 балла). На бал пришли n семейных пар. В каждой паре муж и жена абсолютно одинакового роста, но двух пар одного роста нет. Начинает звучать вальс, и все пришедшие разбиваются случайным образом на пары: каждый кавалер танцует со случайно выбранной дамой. Найдите математическое ожидание случайной величины X «Число кавалеров, которые ниже своей партнёрши».

Решение. Дадим кавалерам номера от 1 до n. Пусть I_j – индикатор события «кавалер номер j ниже своей дамы».

$\mathrm{P}\left(I_j=1\right)=\dfrac{j-1}{n}$. Тогда $\mathrm{E}\,X=\mathrm{E}\,I_1+\mathrm{E}\,I_2+\ldots+\mathrm{E}\,I_n=\dfrac{1}{n}(0+1+\ldots+n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2n}=\dfrac{n-1}{2}$.

Ответ: $\mathrm{E}\,X=\dfrac{n-1}{2}$.

13. Кольцевая линия (от 8 класса. 3 балла). По будням Рассеянный Учёный едет на работу по кольцевой линии московского метро от станции «Таганская» до станции «Киевская», а вечером – обратно (см. схему).

Войдя на станцию, Учёный садится в первый же подошедший поезд. Известно, что в обоих направлениях поезда ходят с примерно равными интервалами, причём по северному маршруту (через «Белорусскую») поезд идёт от «Киевской» до «Таганской» или обратно 17 минут, а по южному маршруту (через «Павелецкую») – 11 минут.

По давней привычке Учёный всё всегда подсчитывает. Однажды он подсчитал, что по многолетним наблюдениям:

- поезд, идущий против часовой стрелки, приходит на «Киевскую» в среднем через 1 минуту 15 секунд после того, как на неё приходит поезд, идущий по часовой стрелки. То же верно и для «Таганской»;

- на поездку из дома на работу Учёный в среднем тратит на 1 минуту меньше, чем на поездку с работы домой.

Найдите математическое ожидание интервала между поездами, идущими в одном направлении.

Решение. Если бы Учёный садился в поезда разных направлений с равными вероятностями, то среднее время поездок в одну сторону и среднее время поездок в другую были бы одинаковы. Значит, вероятности не равны.

Пусть p – вероятность того, что Учёный садится в поезд, идущий по часовой стрелке. Тогда математическое ожидание времени в пути от «Таганской» до «Киевской» равно

$$11p+17(1-p)=17-6p.$$

На обратном пути «Киевская» – «Таганская» математическое ожидание времени в пути равно

$$17p+11(1-p)=11+6p.$$

По условию $11+6p-(17-6p)=1$, откуда $p=\frac{7}{12}$. Обозначим интервал между поездами T. Тогда $T(1-p)=Y$, где Y – время между приходом поезда «по часовой» и приходом поезда «против часовой» на любимые станции. Тогда

$$\mathrm{E}T=\frac{\mathrm{E}Y}{1-p}=\frac{5}{4}\cdot\frac{12}{5}=3.$$

Ответ: 3 минуты.

14. Первая группа (от 8 класса. 3 балла). Последовательность состоит из 19 единиц и 49 нулей, стоящих в случайном порядке. Назовём группой максимальную подпоследовательность из одинаковых символов. Например, в последовательности 110001001111 пять групп: две единицы, потом три нуля, потом одна единица, потом два нуля и, наконец, четыре единицы. Найдите математическое ожидание длины первой группы.

Решение. Отдельно пронумеруем единицы числами от 1 до 19 и отдельно – нули числами от 1 до 49. Пусть I_k – индикатор события «перед k-й единицей нет нулей» и J_m – индикатор события «перед m-ым нулём нет единиц», где $1\le k\le 19$ и $1\le m\le 49$. Если хотя бы один из индикаторов I_k равен единице, то первая группа состоит из единиц, и поэтому все индикаторы J_m равны нулю. И наоборот – если хотя бы один из индикаторов J_m равен единице, то все I_k равны нулю. Искомая величина X «длина первой группы» равна

$$I_1+I_2+\ldots+I_{19}+J_1+J_2+\ldots+J_{49}.$$

Вероятность события «$I_k=1$» равна 1/50, поскольку это событие наступает только тогда, когда в случайно перемешанной последовательности, состоящей из k-й единицы и всех 49 нулей, единица стоит на первом месте. Следовательно,

$$\mathrm{E}I_k=\mathrm{P}(I_k=1)=1/50=0{,}02.$$

Аналогично, $\mathrm{E}J_m=\mathrm{P}(J_m=1)=1/20=0{,}05$. Поэтому $\mathrm{E}X=19\cdot 0{,}02+49\cdot 0{,}05=2{,}83$.

Ответ: $2{,}83$.

15. Случайные векторы. Имеется n случайных векторов вида (y_1, y_2, y_3), где ровно одна случайная координата равна 1, остальные равны 0. Их складывают. Получается случайный вектор $\vec{a}$ с координатами (Y_1, Y_2, Y_3).

а) **(от 9 класса. 2 балла).** Найдите математическое ожидание случайной величины $\vec{a}^2$.

б) **(от 9 класса. 2 балла).** Докажите, что $|\vec{a}| \geq \frac{n}{\sqrt{3}}$.

Решение. а) Найдём математическое ожидание $\mathrm{E}Y_j^2$. Величина Y_j – число единиц среди чисел y_j, то есть эта величина распределена по биномиальному закону с вероятностью $p = 1/3$ и числом испытаний n. Поэтому

$$\mathrm{E}Y_j = n \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3} \text{ и } \mathrm{D}Y_j = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}.$$

Тогда

$$\mathrm{E}\left(\vec{a}^2\right) = \mathrm{E}\left(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\right) = 3\mathrm{E}Y_1^2 = 3\left(\mathrm{D}Y_1 + \mathrm{E}^2 Y_1\right) = 3 \cdot \frac{2n}{9} + 3 \cdot \frac{n^2}{9} = \frac{2n + n^2}{3}.$$

б) Воспользуемся известным фактом: среднее квадратичное неотрицательных чисел не меньше, чем их среднее арифметическое.

$$\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2} = \sqrt{\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2}{3}} \cdot \sqrt{3} \geq \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: а) $\frac{2n + n^2}{3}$.

16. Новогодний обычай (от 9 класса. 3 балла). У одного островного племени есть обычай – во время ритуального танца шаман подбрасывает высоко вверх три тонких прямых прута одинаковой длины, связанных в подобие буквы П. Соседние прутья связаны короткой ниткой и поэтому свободно вращаются друг относительно друга. Прутья падают на песок, образуя случайную фигуру. Если получается самопересечение (первый и третий прутья перекрещиваются), то племя в наступающем году ждут неурожаи и всякие неприятности. Если же самопересечения нет, то год будет удачным – сытным и счастливым. Найдите вероятность того, что на 2017 год прутья напророчат удачу.

Решение. Ломаную, образованную прутьями, назовем $ABCD$. Пусть $\alpha = \angle ABC$ – угол между первым звеном и вторым, а $\beta = \angle BCD$ – угол между вторым и третьим (см. рис.1). Можно считать, что $0 \leq \alpha \leq \pi$ и тогда $0 \leq \beta \leq 2\pi$. Элементарными исходами являются пары $(\alpha; \beta)$. На координатной плоскости $\alpha O\beta$ они заполняют прямоугольник G (см.рис.2), при этом вероятность попадания точки $(\alpha; \beta)$ внутрь некоторой фигуры пропорциональна площади этой фигуры.

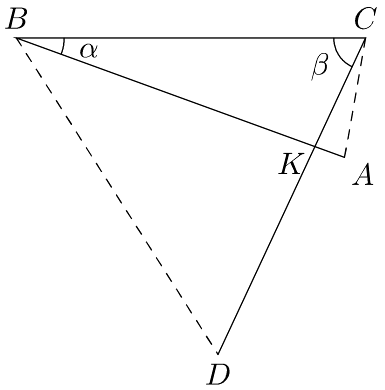


Рис. 1

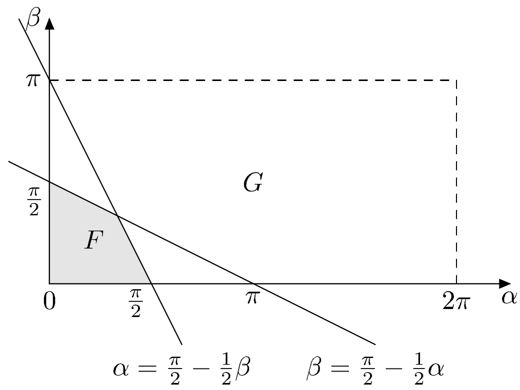


Рис. 2

Первое и третье звенья AB и CD пересекаются в некоторой точке K, только если луч CD лежит внутри угла BCA, а луч BA лежит внутри угла CBD, то есть

$$0 \le \angle BCD < \angle BCA,\ 0 \le \angle ABC < \angle CBD.$$

Учитывая, что треугольники ABC и CBD равнобедренные, получаем два симметричных условия $0 \le \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ и $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$.

На координатной плоскости $\alpha O \beta$ эти неравенства определяют четырёхугольник F внутри прямоугольника G. Вероятность самопересечения равна $\mathrm{P}(F) = \frac{S_F}{S_G} = \frac{1}{12}$. Значит, искомая вероятность равна $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Ответ: $\frac{11}{12}$.

17. Кролики (от 9 класса 3 балла). Кролики бывают гладкошёрстные и мохнатые. Тип шерсти определяется генами, унаследованными от родителей. Каждый кролик имеет два *аллеля* одного и того же гена, отвечающего за тип шерсти. Аллель мохнатости обозначим *H* (или *h*), а аллель гладкошёрстности обозначим *S* (или *s*). Если у кролика разные аллели, то всё зависит от того, какой аллель доминантный (подавляющий), а какой – рецессивный (подавляемый). Большие буквы используем для доминантных аллелей, а малые – для рецессивных. Таким образом, если *генотип* (комбинация аллелей) *Hs*, то кролик будет мохнатым, несмотря на наличие аллеля гладкошёрстности. Если генотип *hS*, то кролик гладкошёрстный. Каждый из родителей передает детёнышу один из своих аллелей. Например, если отец имел генотип *hh*, а мать – генотип *hS*, то детёныш может получить от отца только аллель *h*, а от матери с равными шансами любой из аллелей *h* и *S*. Поэтому с вероятностью 0,5 у детёныша будет генотип *hh* и с такой же вероятностью 0,5 будет генотип *hS* (мы считаем, что доминантность или рецессивность аллелей не связаны с полом кролика).

Известно, что в некоторой популяции кроликов аллель мохнатости встречается с вероятностью $p = 0{,}1$. Однажды в этой популяции при скрещивании мохнатого кролика с гладкошерстной крольчихой все четыре крольчонка оказались мохнатыми. Какой генотип наиболее вероятен у родителей этих крольчат?

Решение. Аллель *S* (или *s*) встречается с вероятностью $q = 1 - p$. Перечислим возможные варианты.

1. Мохнатый кролик *hh* и гладкошёрстная крольчиха *Sh*. Вероятность такой комбинации $p^2 \cdot 2pq = 2p^3q$, и в этом случае мохнатый крольчонок *hh* родится с вероятностью 0,5.

2. Пара *HH*, *ss*. Вероятность p^2q^2, и в этом случае крольчонок неизбежно получает генотип *Hs*, а поэтому с вероятностью 1 будет мохнатым.

3. Пара *Hs*, *ss*. Вероятность этого $2pq^3$, и мохнатый крольчонок *Hs* получается с вероятностью 0,5.

Известно, что появились 4 крольчонка, и все мохнатые (событие M). Вероятность этого равна сумме трёх вероятностей:

$$P(M)=p^2q^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 2p^3q+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 2pq^3=pq\left(pq+\frac{1}{8}\left(p^2+q^2\right)\right).$$

Переоценим вероятность пары Hs, ss при условии M с помощью формулы Байеса:

$$P\left(Hs,ss\,|M\right)=\frac{P\left(Hs,ss\right)P\left(M\,|hh,Sh\right)}{P(M)}=\frac{2pq^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}{pq\left(pq+\frac{1}{8}\left(p^2+q^2\right)\right)}=$$

$$=\frac{q^2}{8pq+p^2+q^2}=\frac{0,81}{8\cdot 0,09+0,01+0,81}=\frac{81}{154}>0,5.$$

Получилось, что комбинация Hs, ss не просто самая вероятная, она вероятнее всех остальных вместе взятых.

Ответ: Hs, ss.

18. Задача Стирлинга (от 9 класса, 5 баллов). Неправдоподобная легенда гласит, что однажды Стирлинг[4] размышлял над числами Стирлинга второго рода и в задумчивости бросал на стол 10 правильных игральных костей. После очередного броска он вдруг заметил, что в выпавшей комбинации очков присутствуют все числа от 1 до 6. Тут же Стирлинг задумался, а какова же вероятность такого события? Какова вероятность, что при бросании 10 костей каждое число очков от 1 до 6 выпадет хотя бы на одной кости?

Решение. Найдем вероятность события A «в выпавшей комбинации какого-то числа нет». Обозначим A_k событие «нет числа k». Тогда

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6.$$

С помощью формулы включения–исключения получаем:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\ldots+\mathrm{P}(A_6)-\\ -\mathrm{P}(A_1\cap A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_3)-\ldots-\mathrm{P}(A_5\cap A_6)+\\ +\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)+\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_4)+\ldots+\mathrm{P}(A_4\cap A_5\cap A_6)-\\ -\ldots-\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6).\end{gathered}$$

Все вероятности $\mathrm{P}(A_k)$ равны между собой и равны $(5/6)^{10}$, а всего их $C_6^1=6$. Вероятности попарных произведений равны между собой и равны $(4/6)^{10}$, а всего их $C_6^2=15$ и т.д. Получается

$$\mathrm{P}(A)=6\cdot(5/6)^{10}-15\cdot(4/6)^{10}+20\cdot(3/6)^{10}-15\cdot(2/6)^{10}+6\cdot(1/6)^{10}.$$

Следовательно, вероятность того, что каждое число встретится хотя бы раз, равна

$$\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)=1-6\cdot(5/6)^{10}+15\cdot(4/6)^{10}-20\cdot(3/6)^{10}+15\cdot(2/6)^{10}-6\cdot(1/6)^{10}.$$

[4] Джеймс Стирлинг - шотландский математик XVIII в.

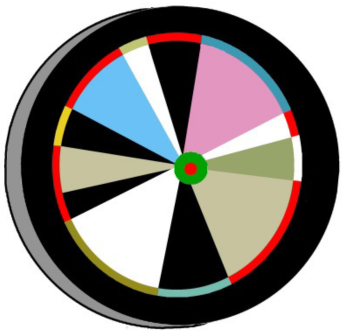
Если вы знакомы с числами Стирлинга, то решение можно написать экономнее. Напомним, что числом Стирлинга второго рода $S(n,k)$ называется количество возможных неупорядоченных способов разбить n элементов на k непустых групп. В нашем случае нужно перечислить упорядоченные способы разбить 10 костей на 6 непустых групп: в первой группе выпавшие единицы, во второй – двойки и т.д. Значит, всего таких способов $6!\cdot S(10,6)$. С помощью таблицы чисел Стирлинга второго рода (например, https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers_of_the_second_kind) или с помощью рекурсии

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$

при $S(0,0)=1$ и $S(k,0)=S(0,k)=0$, если $k>0$ находим: $S(10,6)=22827$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{6!\cdot S(10,6)}{6^{10}}=\frac{720\cdot 22827}{6^{10}}=0,2718...$$

Ответ: прибл. $0,272$.



Любимый дартс Коши-Буняковского

19. Дартс (от 9 класса. 5 баллов). Согласно одной неправдоподобной легенде, Коши[5] и Буняковский[6] очень любили по вечерам играть в дартс. Но мишень у них была необычная – секторы на ней были неравные, так что вероятности попасть в разные секторы были не одинаковы. Однажды Коши бросил дротик и попал в мишень. Следующим бросает Буняковский. Что более вероятно: что Буняковский попадёт в тот же сектор, в который попал Коши, или что он попадёт в следующий сектор по часовой стрелке?

Решение. Пусть вероятности поразить секторы равны $p_1, p_2, ..., p_n$ (индексы указывают номера секторов). Вероятность того, что Буняковский попадёт в тот же сектор, что и Коши, равна

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+...+p_n^2,$$

а вероятность того, что Буняковский попадёт в следующий по часовой стрелке сектор, равна

$$p_1p_2+p_2p_3+...+p_{n-1}p_n+p_np_1.$$

Осталось воспользоваться неравенством Коши-Буняковского:

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+...+p_n^2=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+...+p_{n-1}^2+p_n^2}\cdot\sqrt{p_2^2+p_3^2+p_4^2+...+p_n^2+p_1^2}\geq$$
$$\geq p_1p_2+p_2p_3+...+p_{n-1}p_n+p_np_1,$$

причём равенство достигается, только если $p_1=kp_2, p_2=kp_3, ..., p_{n-1}=kp_n$, $p_n=kp_1$ при некотором k. Равенство возможно лишь при $k=1$ (тогда все вероятности одинаковы) или $k=0$ (все вероятности нулевые). Оба эти варианта противоречат условию. Следовательно,

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+...+p_n^2>p_1p_2+p_2p_3+...+p_{n-1}p_n+p_np_1.$$

Ответ: более вероятно, что в тот же.

[5] Огюстен Луи Коши – французский математик XIX века.
[6] Виктор Яковлевич Буняковский – российский математик XIX века.