Пригласительный тур X олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

Ответы и решения

Вариант 1

Задания с кратким ответом

Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	28%	4	2
2	240 см	5	D
3	6	6	0,8

Примечание. Задания 1 – 6 считаются выполненными, если дан верный ответ. В задании 2 ответ может быть дан в любых единицах; например: 2,4 м или 2400 мм.

Задания с развернутым ответом

7. *Решение*. Чтобы средний балл в обеих группах вырос, надо переводить из группы А в группу Б тех учеников, у которых средний балл выше среднего в группе Б, но ниже среднего в группе А. Балл выше среднего в Б, но ниже среднего в А у двоих: у Калининой и у Сидорова. Если перевести только Калинину, то в группе Б средний балл станет

$$\frac{38,8\cdot 10+41}{11}=39<39,2.$$

Если перевести только Сидорова, то в группе А средний балл станет

$$\frac{44,2\cdot 10-44}{9}=44\frac{2}{9}<44,4.$$

Если же перевести обоих, то в группе А средний балл станет

$$\frac{44,2\cdot 10-44-41}{8}=44\frac{5}{8}>44,4\text{, а в группе Б получится }\frac{38,8\cdot 10+41+44}{12}=39\frac{5}{12}>39,2.$$

Ответ: надо перевести Калинину и Сидорова из группы А в группу Б.
Примечание: решение, возможно, не единственное.

Критерий оценивания	**Балл**
Решение полное и верное	2
Решение в принципе верное, но не показано, что необходимо перевести обоих учащихся, а не только одного	1
Решение неверное или отсутствует (например, дан только ответ)	0

8. *Доказательство. 1 способ.* Введём три случайные величины I_1, I_2 и I_3: пусть $I_k=1$, если автомат номер k сломался, и $I_k=0$, если не сломался. Легко найти математические ожидания:

$$\mathrm{E}\,I_1=0,4,\ \mathrm{E}\,I_2=0,3,\ \mathrm{E}\,I_3=p,$$

где p – вероятность поломки третьего автомата. Тогда число сломанных автоматов равно

$$X=I_1+I_2+I_3\text{, поэтому }\mathrm{E}\,X=0,4+0,3+p=0,7+p.$$

Если верить Иванову, то $0,7+p=\frac{12}{7}$, откуда $p=\frac{12}{7}-\frac{7}{10}=\frac{71}{70}>1$, что невозможно. Противоречие. Иванов преувеличивает.

2 способ. Пусть p — вероятность того, что первые два автомата сломались одновременно. Тогда математическое ожидание числа поломок этих двух автоматов равно

$$1\cdot(0,4-p+0,3-p)+2\cdot p=0,7.$$

Значит, число поломок всех трёх автоматов в день не больше $0,7+1=1,7$. А за неделю $1,7\cdot 7=11,9<12$. Иванов преувеличивает.

Критерий оценивания	**Балл**
Доказательство полное и верное	3
Рассуждения в принципе верные, но нет перехода к математическим ожиданиям: получено число поломок в случае, когда частоты поломок равны соответствующим вероятностям	2
Рассуждение в принципе верное, но в решении использовано дополнительное условие независимости автоматов	1
Доказательство отсутствует или неверное	0

9. *Решение*. Введём обозначения событий:

$$A=\{\text{В первой корзине есть идея}\},\ B=\{\text{Во второй корзине есть идея}\}.$$

Требуется найти вероятность события $A\cap B$: $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$. Из условия находим: $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=1-p^5$. Вероятность того, что при одном броске Учёный попадёт в одну определённую корзину, равна $1-p$. Попасть сразу в две невозможно, поэтому вероятность того, что Учёный попал хотя бы в одну корзину, равна $2-2p$. Тогда вероятность не попасть одним броском ни в одну из корзин равна $1-(2-2p)=2p-1$, а вероятность не попасть ни разу из пяти равна $(2p-1)^5$. Значит,

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1-(2p-1)^5.$$

Получаем:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=2-2p^5-1+(2p-1)^5=1-2p^5+(2p-1)^5.$$

Ответ: $1-2p^5+(2p-1)^5$.

Критерий оценивания	**Балл**
Решение полное и верное	3
Решение в принципе верное, но допущена ошибка в преобразованиях или в переходе к вероятности противоположного события. Возможно, неверный ответ	2
Явно выписана формула вероятности пересечения событий, дальнейшие шаги отсутствуют, несущественные или ошибочные	1
Решение отсутствует или неверное	0

Вариант 2

Задания с кратким ответом

Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	15%	4	3
2	3340 г	5	*A*
3	7	6	0,5

Примечание. Задания 1 – 6 считаются выполненными, если дан верный ответ. В задании 2 ответ может быть дан в любых единицах; например, 3,34 кг.

Задания с развернутым ответом

7. *Решение*. Чтобы средний балл в обеих группах вырос, надо переводить из группы А в группу Б тех учеников, у которых средний балл выше среднего в группе Б, но ниже среднего в группе А. Балл выше среднего в Б, но ниже среднего в А у двоих: у Лопатина и у Филина. Если перевести только Филина, то в группе Б средний балл станет

$$\frac{41,8\cdot 10+44}{11}=42<42,2\,.$$

Если перевести только Лопатина, то в группе А средний балл станет

$$\frac{47,2\cdot 10-47}{9}=47\frac{2}{9}<47,5\,.$$

Если же перевести обоих, то в группе А средний балл станет

$\dfrac{47,2\cdot 10-47-44}{8}=47\dfrac{5}{8}>47,5$, а в группе Б получится $\dfrac{41,8\cdot 10+44+47}{12}=42\dfrac{5}{12}>42,2$.

Ответ: надо перевести Лопатина и Филина из группы А в группу Б.
Примечание: решение, возможно, не единственное.

Критерий оценивания	**Балл**
Решение полное и верное	2
Решение в принципе верное, но не показано, что необходимо перевести обоих учащихся, а не только одного	1
Решение неверное или отсутствует (например, дан только ответ)	0

8. *Доказательство.*
1 способ. Введём три случайные величины I_1, I_2 и I_3: пусть $I_k=1$, если автомат номер k сломался, и $I_k=0$, если не сломался. Легко найти математические ожидания:

$$\mathrm{E}\,I_1=0,3,\ \mathrm{E}\,I_2=0,2,\ \mathrm{E}\,I_3=p,$$

где p – вероятность поломки третьего автомата. Тогда число сломавшихся за день автоматов равно $X=I_1+I_2+I_3$, поэтому $\mathrm{E}\,X=0,3+0,2+p=0,5+p$.

Если верить Петрову, то $0,5+p=\dfrac{3,3}{7}$, откуда $p=\dfrac{33}{70}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{35}<0$, что невозможно. Противоречие. Петров преуменьшает.

2 способ. Пусть p — вероятность того, что первые два автомата сломались одновременно. Тогда математическое ожидание числа поломок этих двух автоматов равно

$$1\cdot(0,3-p+0,2-p)+2\cdot p=0,5.$$

Значит, число поломок всех трёх автоматов в день не меньше $0,5+0=0,5$. А за неделю: $0,5\cdot 7=3,5>3,3$. Петров преуменьшает.

Критерий оценивания	**Балл**
Доказательство полное и верное	3
Рассуждения в принципе верные, но нет перехода к математическим ожиданиям: получено число поломок в случае, когда частоты поломок равны соответствующим вероятностям	2
Рассуждение в принципе верное, но в решении использовано дополнительное условие независимости автоматов	1
Доказательство отсутствует или неверное	0

9. *Решение*. Введем обозначения событий:

$$A=\{\text{В первой корзине есть идея}\},\ B=\{\text{Во второй корзине есть идея}\}.$$

Требуется найти вероятность события $A\cap B$: $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$. Вероятность того, что при одном броске Учёный не попадёт в одну определённую корзину, равна $1-p$. Значит, он не попадёт в неё шесть раз с вероятностью $(1-p)^6$. Поэтому $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=1-(1-p)^6$. Попасть сразу в две корзины невозможно, поэтому вероятность того, что Учёный попал хотя бы в одну корзину, равна $2p$. Тогда вероятность не попасть одним броском ни в одну из корзин равна $1-2p$, а вероятность не попасть ни разу из шести равна $(1-2p)^6$. Следовательно, $\mathrm{P}(A\cup B)=1-(1-2p)^6$.

Получаем:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=2-2(1-p)^6-1+(1-2p)^6=1-2(1-p)^6+(1-2p)^6.$$

Ответ: $1-2(1-p)^6+(1-2p)^6$.

Критерий оценивания	**Балл**
Решение полное и верное	3
Решение в принципе верное, но допущена ошибка в преобразованиях или в переходе к вероятности противоположного события. Возможно, неверный ответ	2
Явно выписана формула вероятности пересечения событий, дальнейшие шаги отсутствуют, несущественные или ошибочные	1
Решение отсутствует или неверное	0