10 класс

1. *Ответ.* Да, например, 5 002 018.

Решение. Действительно,

$$(5\cdot 10^6+2018)^2=25\cdot 10^{12}+2018\cdot 10^7+4\,072\,324,$$

поэтому квадрат этого числа содержит последовательность цифр «2018».

2. *Ответ.* 10.

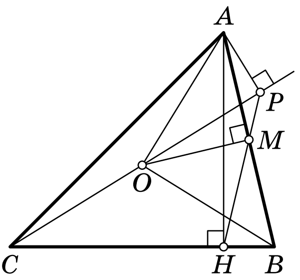
Решение. Рассмотрим рамку, ограничивающую квадрат 10×10, полностью состоящий из чёрных клеток. При последовательном перемещении этой рамки направо, налево, вверх и вниз можно добраться до квадрата 10×10, полностью состоящего из белых клеток. При этом на каждом шаге перемещения из рамки убираются 10 клеток и в неё добавляются 10 клеток. Таким образом, за один шаг количество чёрных клеток, содержащихся внутри квадрата, изменяется не более чем на 10.

В частности, по пути от полностью чёрного до полностью белого квадрата встретится квадрат, в котором от 45 до 55 чёрных клеток. Для такого квадрата количество чёрных и белых клеток отличается не более чем на 10.

Построим квадрат 2018×2018, в котором во всех квадратах 10×10 количество чёрных и белых клеток отличается не меньше чем на 10. Для этого в квадрате 2018×2018 проведём диагональ из нижнего левого угла в верхний правый. Все клетки над диагональю покрасим белым, а диагональ и клетки под диагональю — чёрным. В любом квадрате 10×10 все клетки диагонали из нижнего левого угла в верхний правый покрашены одним цветом, причём если этот цвет чёрный, то и все клетки над диагональю чёрные, значит, их хотя бы 55, и количество чёрных и белых клеток отличается хотя бы на 10. Аналогично, если диагональ белая, то все клетки под диагональю белые, и их не менее 55.

3. *Решение.* Пусть M — середина отрезка AB. Рассмотрим точки A, O, M и P. Поскольку $\angle AMO=\angle APO=90^\circ$, точки A, O, M и P лежат на одной окружности. Значит, $\angle CPM=\angle OPM=\angle OAM$.

Рассмотрим точки A, C, H и P. Они также лежат на одной окружности, так как $\angle AHC=\angle APC=90^\circ$. Следовательно, $\angle CPH=\angle CAH$.



Помимо того,

$$\angle CAH = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle AOM = \angle OAM.$$

Получаем:

$$\angle CPM = \angle OAM = \angle CAH = \angle CPH.$$

Значит, точки M, P и H лежат на одной прямой.

Комментарий. Расположение точек может отличаться от представленного на рисунке. Для других случаев расположения точек доказательство аналогично.

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. *Решение.* Обозначим через D наибольшую из длин сторон торта. Тогда длины всех сторон всех треугольников, которые будут получаться у Карлсона в процессе поедания торта, не будут превосходить D.

Предположим, что Карлсон может сделать сколько угодно описанных операций так, чтобы площадь съеденного торта не превосходила $1/2$ от площади всего торта.

Возьмем треугольник, который получается на $(k-1)$-м шаге, и обозначим его площадь через S_k, а стороны, между которыми проходит k-й разрез, через a_k и b_k. Будем считать, что Карлсон съедает кусок, примыкающий к стороне a_k. Тогда по теореме о биссектрисе площадь съеденного на k-м шаге куска равна $S_k - S_{k+1} = \dfrac{S_k a_k}{a_k + b_k}$.

Рассмотрим длины всех сторон a_k. Возможны два случая: либо они все больше некоторого положительного числа $\ell > 0$, либо такого числа ℓ не существует.

В первом случае получается, что на k-м шаге Карлсон съедает кусок торта площадью не меньше чем

$$\frac{a_k S_k}{a_k + b_k} > \frac{a_k S_k}{2D} > \frac{\ell S_k}{2D}.$$

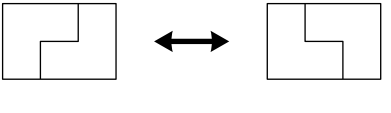
Можно оценить площадь оставшегося куска:

$$S_{k+1} < S_k \left(1 - \frac{\ell}{2D}\right).$$

Поэтому $S_{k+1} < S_1 (1 - \ell/2D)^k$. Но выражение в скобках строго меньше 1, то есть при достаточно больших k его k-я степень будет меньше $1/2$.

Допустим теперь, что a_k могут быть сколь угодно близки к нулю. Возьмем такое a_k, для которого $a_k < S_1/D$. Оценим площадь треугольника S_k сверху как половину произведения сторон: $S_k \leqslant a_k D/2$. Но, поскольку $a_k < S_1/D$, отсюда следует, что $S_k < S_1/2$, то есть к k-му шагу больше половины торта уже окажется съедено.

6. *Решение.* Для каждого разрезания квадрата на уголки определим соответствующее ему разрезание квадрата на уголки и прямоугольники 2×3 следующим образом. Посмотрим на разрезание R. Если в нем найдется уголок, примыкающий к сторонам квадрата и образующий вместе с еще каким-то уголком прямоугольник 2×3, заменим эти два уголка на прямоугольник. Проведем все возможные такие замены. Будем говорить, что мы получили *предразрезание $\mathfrak{R}$, соответствующее разрезанию R*. Заметим, что по каждому разрезанию мы строим единственное предразрезание: в самом деле, один уголок может входить только в один прямоугольник 2×3. В частности, отсюда следует, что если взять разрезание R и заменить в нем два уголка, образующих прямоугольник 2×3, на два других уголка, дающих тот же прямоугольник (как на рисунке), мы полу-



чим разрезание R', имеющее то же самое предразрезание, что и R. Это означает, что предразрезанию $\mathfrak{R}$ соответствуют ровно 2^k разрезаний, где k — число прямоугольников в предразрезании.

Докажем, что в каждом предразрезании хотя бы 4 прямоугольника. В самом деле, длина стороны нечетна, значит, к каждой стороне хотя бы один из уголков примыкает одной клеткой, причем один уголок не может одной клеткой примыкать к двум сторонам. Каждый из четырех таких уголков образует вместе с еще одним уголком прямоугольник 2×3.

Теперь докажем, что количество предразрезаний с фиксированным k делится на 8. У квадрата есть 8 движений: четыре поворота на 0°, 90°, 180° и 270° и четыре осевых симметрии: две относительно диагоналей, две относительно средних линий. Для каждого предразрезания $\mathfrak{R}$ рассмотрим его образы при этих движениях; если все 8 образов разные, то мы разбили множество предразрезаний с фиксированным k на группы по 8. Предположим, что какие-то два образа совпали. Посмотрим на центральную клетку. Она покрыта уголком (здесь нам важно, что прямоугольники примыкали к границам, значит, до центра не дотягиваются). При движении центральная клетка переходит в себя, значит, и покрывающий ее уголок тоже. Это возможно в единственном случае: если движение является симметрией относительно диагонали, а уголок лежит центром на центральной клетке симметрично относительно этой диагонали. Но тогда посмотрим на клетку, дополняющую этот уголок до квадрата 2×2, эта клетка снова на диагонали, значит, переходит в себя, значит, покрывающая ее фигура — тоже. Тогда это снова уголок (прямоугольники 2×3 не переходят в себя при симметрии относительно диагонали квадрата), он снова лежит симметрично относительно диагонали, у него снова есть такая клетка, и так далее. Строя такую последовательность уголков, мы упремся в угол квадрата и получим непокрытую клетку: противоречие.

Итак, мы доказали, что число предразрезаний с фиксированным $k \geqslant 4$ кратно 8, значит, и число соответствующих им разрезаний делится на 2^{3+k}, то есть хотя бы на 2^7. Складывая по всем возможным k, получаем утверждение задачи.