Условия задач, ответы, критерии оценивания

1. Анаморфные призмы (7 баллов), Крюков П. А.

Две одинаковые призмы ($\alpha = 30°$, рис. 1), изготовленные из материала с показателем преломления n, используют для изменения поперечного размера пучка параллельных лучей.

1) Для $n = 1{,}73$ найдите угол φ между основаниями призм.

2) Найдите для произвольного n отношение $\dfrac{d}{D}$. Какие значения может принимать n?

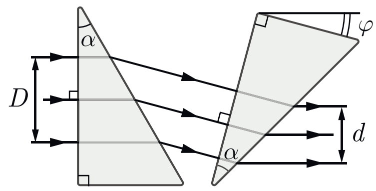

Рис. 1

Ответ: 1) $\varphi = 30°$. 2) $\dfrac{d}{D} = \dfrac{4 - n^2}{3}$, $n < 2$.

Распределение баллов

Получен правильный ответ в п. 1) и правильные ответы на оба вопроса в п. 2) — **7 баллов**.
Если ответы неполные или ошибочные, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, то распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).

1. Записан закон преломления для первой призмы — **1 балл**.
2. Получена формула для угла преломления $\arcsin(n \sin\alpha)$ — **1 балл**.
3. Найден угол отклонения пучка первой призмой $\beta = \arcsin(n\sin\alpha) - \alpha = 30°$ — **1 балл**.
4. Показано, что основание второй призмы повёрнуто относительно основания первой на угол $\varphi = \beta$ и найдено верное значение $\varphi = 30°$ — **1 балл**.
5. Получена формула
$$d_1 = D \cdot \frac{\sqrt{1 - (n\sin\alpha)^2}}{\cos\alpha},$$
связывающая размеры пучков после прохождения первой призмы — **1 балл**.
6. Получена формула
$$\frac{d}{D} = \frac{1 - (n\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{4 - n^2}{3}.$$
для отношения поперечных размеров выходящего и входящего пучков — **1 балл**.
7. Найдено неравенство для показателя преломления $n < 2$ — **1 балл**.

2. Измерение показателя адиабаты (8 баллов), Ромашка М. Ю.

Адиабатический процесс для идеального газа описывается уравнением $pV^\gamma = \text{const}$, где p — давление, V — объём, γ — безразмерная величина, называемая показателем адиабаты. Для определения γ ставят следующий эксперимент. Стеклянный баллон заполняют исследуемым газом и измеряют его давление p_1, большее атмосферного давления p_0. При этом температура в баллоне равна температуре в комнате. Затем на короткое время открывают кран и часть газа выходит из баллона. Можно считать, что при открытом кране оставшийся в баллоне газ расширяется адиабатически. Кран закрывают, когда давление в баллоне становится равно p_0. После этого дожидаются выравнивания температур в баллоне и комнате и измеряют давление в баллоне p_2 в конечном состоянии. Определите γ, если $p_0 = 10^5$ Па, $p_1 = 1{,}060 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 1{,}017 \cdot 10^5$ Па.

Примечание. Возможно, окажется полезной приближённая формула $(1+x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$.

Ответ: $\gamma \approx 1{,}4$.

Распределение баллов

1. Получено любым способом соотношение

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{V}{V_1} = \nu_1 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

для числа молей (массы газа, числа молекул) в баллоне в начальном состоянии и в состоянии сразу после закрытия крана — **3 балла**.

Отметим, что рассуждения участников на этом шаге могут быть различными. Например, можно рассматривать только тот объём газа, который не вышел из баллона, и записывать уравнение адиабаты для него, считая, что его конечный объём равен объёму баллона, а начальный — меньше.

Если этот шаг не доведён до конца, тем не менее сделано что-то из перечисленного ниже.

(a) Физические формулы использованы верно, но имеется одна ошибка в алгебраических преобразованиях — **2 балла**.

(b) Записано только уравнение адиабаты, описаны все входящие в него переменные, но нет идеи о связи полного (начального) и оставшегося в баллоне количества газа — **1 балл**.

(c) Записано только уравнение типа $\nu_2 = \nu_1 \dfrac{V}{V_1}$, без связи с уравнением адиабаты — **1 балл**.

2. Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона

$$p_1 V = \nu_1 RT,$$
$$p_2 V = \nu_2 RT.$$

для начального и конечного состояния с правильным описанием входящих в них величин (независимо от того, правильно ли сделан предыдущий шаг решения), либо записано сразу следствие эьтих двух уравнений — **2 балла**.

Если записано уравнение Менделеева-Клапейрона только для одного состояния, либо есть ошибка (одна) в понимании входящих в эти уравнения величин — **1 балл**.

Получено уравнение

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{1}$$

для давлений и показателя адиабаты, или любое равносильное ему уравнение с теми же величинами, но дальнейшего решения нет — **1 балл**.

3. После правильно выполненных шагов 1 и 2 получен правильный численный ответ — **3 балла**.

Если этот шаг не доведён до конца, тем не менее получена конечная формула в любом виде (приближённая или точная, с логарифмами по любому основанию, в любой форме записи), но нет численного ответа — **2 балла**.

3. Бетатрон (9 баллов), Фольклор.

В ускорителе электронов *бетатроне* (рис. 2) изменяющееся во времени магнитное поле, индукция которого $B_r(t)$ зависит от расстояния r до оси симметрии O, порождает вихревое электрическое поле, разгоняющее частицы. Мы хотим, чтобы электроны всё время двигались по окружности радиусом R. Определите численное значение отношения $\dfrac{\Phi_R(t)}{B_R(t)\pi R^2}$ при таком движении. Φ_R — поток магнитного поля через поверхность круга радиусом R. $B_R(t)$ — индукция магнитного поля в момент времени t на расстоянии R от оси симметрии. Считайте, что $\Phi_R(0) = 0$, $v(0) = 0$.

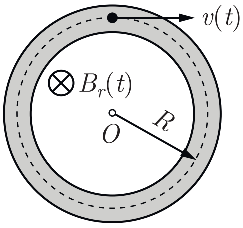

Рис. 2

<u>Ответ</u>: Искомое отношение равно $\dfrac{\Phi_R(t)}{B_R(t)\pi R^2} = 2$.

Распределение баллов

1. Записан закон электромагнитной индукции в виде уравнения $E \cdot 2\pi R = \dfrac{d\Phi_R}{dt}$ — **1 балл**.
2. Получено уравнение $eE = m\dfrac{dv}{dt}$ — **1 балл**.
3. Получена связь потока магнитного поля и скорости электрона в момент времени t, даваемая уравнением $\Phi_R(t) = 2\pi R \cdot \left(\dfrac{m}{e}\right) \cdot v(t)$ — **4 балла**.
   Если сделано необоснованное предположение о линейной зависимости B от расстояния до оси r — **2 балла**.
4. Получено уравнение $B_R(t) \cdot \pi R^2 = \pi R \cdot \left(\dfrac{m}{e}\right) \cdot v(t)$, дающее связь скорости электронов и значения магнитной индукции на расстоянии R от оси — **2 балла**.
5. Получен верный числовой ответ — **1 балл**.

4. Подобрать детали (12 баллов), Бычков А. И., Крюков П. А.

По схеме, показанной на рис. 3, решили изготовить светодиодный светильник, работающий от сети переменного напряжения ($\nu = 50$ Гц, $U = 230$ В, $U_{\max} = 325$ В). Диод D можно считать идеальным. Всего используется 60 одинаковых светодиодов. Вольт-амперная характеристика одного светодиода показана на рис. 4. Ток через светодиод не должен превышать 20 мА. Имеются резисторы и конденсаторы с номиналами, указанными в таблице. W — максимально допустимая мощность, выделяющаяся в резисторе, при работе в штатном режиме. U — максимальное напряжение, которое выдерживает конденсатор без повреждения.

№	1	2	3	4	5	6	7
R, кОм; W, Вт	0,91; 5	1,2; 5	7,5; 2	4,7; 5	6,8; 1	8,2; 5	75; 2
C, мкФ; U, В	0,1; 450	100; 250	20; 350	15; 350	4,7; 300	10; 350	6,8; 300

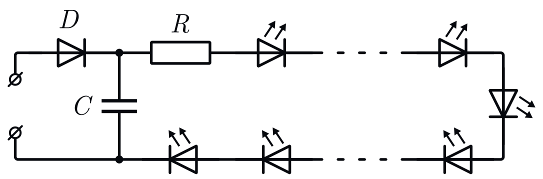

Рис. 3

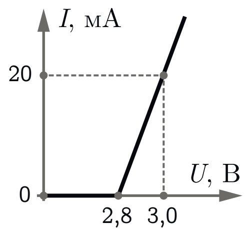

Рис. 4

Желательно, чтобы при работе светильника максимальное отклонение тока через светодиод от среднего значения составляло не более 5%, при этом световой поток был бы максимальным. Выберите подходящие резистор и конденсатор из указанных в таблице. Если подходящих элементов несколько — укажите номера всех.

Ответ: Подходит резистор с сопротивлением 8,2 кОм, рассчитанный на 5 Вт; лучший выбор — конденсатор ёмкостью 20 мкФ, но конденсаторы ёмкостью 10 мкФ и 15 мкФ тоже подходят.

Распределение баллов

1. Показано любым образом (например, изображён качественный график зависимости напряжения на конденсаторе от времени, или приведено словесное объяснение), что конденсатор и диод образуют выпрямитель, который при использовании подходящего конденсатора обеспечивает почти постоянное напряжение на резисторе и светодиодах, близкое к амплитудному значению напряжения в сети, — **1 балл**.
2. Дана верная оценка для сопротивления резистора (без учёта выделяющейся на нём мощности), удовлетворяющая неравенству 6,9 кОм $< R <$ 7,6 кОм — **2 балла**.
   Если рассуждения, приводящие к оценке, в целом верные, но неверно подсчитано числовое значение — **1 балл**.
3. Сделана оценка мощности, выделяющейся на резисторе, и выбран резистор сопротивлением 8,2 кОм — **3 балла**.
   Если рассуждения, приводящие к оценке мощности в целом верные, но неверно подсчитано числовое значение, и выбран не тот резистор — **1 балл**.
4. Дана верная оценка для ёмкости конденсатора так, как в решении, или иным другим непротиворечивым способом, удовлетворяющая неравенству 9 мкФ $< C <$ 11 мкФ — **4 балла**.
   Если рассуждения, приводящие к оценке ёмкости верные, но числовое значение вычислено неверно из-за неверной оценки сопротивления резистора — **3 балла**.
   Если рассуждения, приводящие к оценке ёмкости в целом верные, но числовое значение вычислено неверно по другим причинам — **2 балла**.
5. Сделан правильный выбор конденсатора ёмкостью 20 мкФ — **2 балла**.
   Если указано, что подходят три конденсатора ёмкостью 10 мкФ, 15 мкФ, 20 мкФ, или указано, что подходят только два конденсатора ёмкостью 15 мкФ и 20 мкФ — **1 балл**.

5. Парус как крыло (12 баллов), Крюков П. А.

Динамика буера (ледовой яхты, рис. 5) может быть описана на основе модели, в которой парус считается вертикально расположенным крылом. Силу F, действующую на парус со стороны воздуха (см. рис. 6, вид сверху), принято раскладывать на две составляющие: D, направленную вдоль скорости w потока воздуха относительно буера, и L, перпендикулярную D. Можно считать, что $D = C_D\dfrac{\rho w^2}{2}S$, $L = C_L\dfrac{\rho w^2}{2}S$, где S — площадь паруса, ρ — плотность воздуха; безразмерные коэффициенты C_D и C_L зависят только от ориентации паруса относительно набегающего потока воздуха. Взаимодействие с горизонтальной поверхностью снега (или льда) характеризуется силами T (трения) и горизонтальной реакции N. Далее везде трением мы пренебрегаем. Угол между скоростью буера v и скоростью ветра относительно земли u обозначим θ.

1) Пусть известно, что буер движется с постоянной скоростью. Отношение $\dfrac{C_L}{C_D} = k$ задано. Кроме того даны скорость ветра u и угол θ. Определите скорость буера v. Если параметр k и скорость ветра u остаются постоянными, а угол θ может изменяться от 0° до 90°, то чему равна максимально возможная скорость буера v в рамках данной модели? (*5 баллов*)

Рис. 5

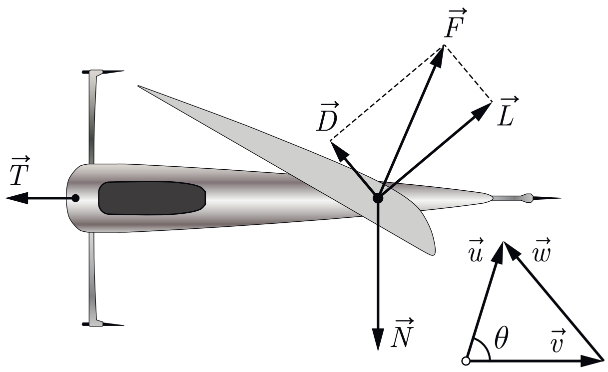

Рис. 6

2) На рис. 7 показана кривая, координаты точек которой равны значениям коэффициентов C_D и C_L для разных положений паруса относительно набегающего потока воздуха. Определите максимально возможное ускорение буера при старте из положения покоя. Скорость ветра $u = 10$ м/с, масса буера и человека 100 кг, площадь паруса 7 м^2, атмосферное давление нормальное, температура воздуха $-10°$ С.(*3 балла*)

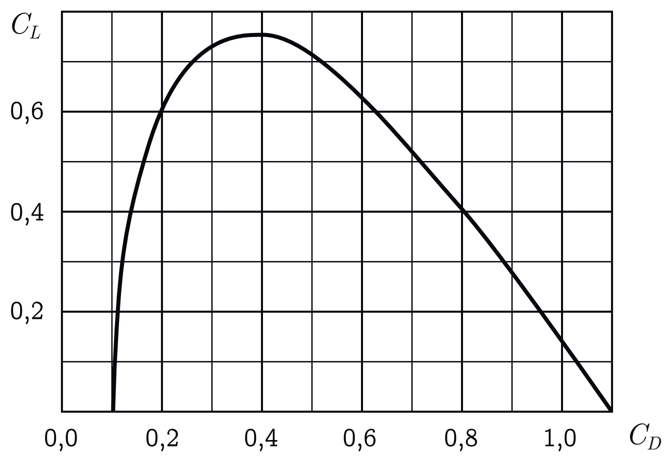

Рис. 7

3) Используя кривую, показанную на рис. 7, определите при каких значениях угла θ возможно движение буера с постоянной скоростью. (*4 балла*)

Ответ: 1) $v = u(\cos\theta + k\sin\theta)$, $v_{\max} = u\sqrt{k^2+1}$. 2) $a_{\max} = \dfrac{1{,}1\rho u^2 S}{2m} \approx 5$ м/с^2. 3) $0° < \theta < 162° \pm 2°$.

Распределение баллов

1. Получен правильный ответ, содержащий формулу
$$v = u(\cos\theta + k\sin\theta). \quad (1)$$
и выражение для максимальной скорости $v_{\max} = u\sqrt{k^2+1}$ — **5 баллов**.
Если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, то распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).
   (a) Сказано, что движение с постоянной скоростью возможно только тогда, когда векторная сумма сил D и L перпендикулярна скорости, но формула (1) не получена — **1 балл**.
   (b) Показано, что справедливо соотношение $\operatorname{ctg}\varphi = k$ — **1 балл**.
   (c) Получена формула (1) — **2 балла**.
2. Получен верный ответ, содержащий формулу $a_{\max} = \dfrac{1{,}1\rho u^2 S}{2m}$ и вычисленное значение ускорения $a_{\max}$, удовлетворяющее неравенству $4{,}5$ м/с$^2 < a_{\max} < 5{,}5$ м/с^2 — **3 балла**.
Если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, то распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).
   (a) Указано, что максимальное ускорение достигается при значениях коэффициентов C_D и C_L, соответствующих точке с координатами $(1{,}1, 0)$ — **1 балл**.
   (b) Получена формула $a_{\max} = \dfrac{1{,}1\rho u^2 S}{2m}$, но значение ускорения не найдено, или найдено неправильно — **1 балл**.
3. Получено верное неравенство для угла $0° < \theta < 162° \pm 2°$ — **4 балла**. Если ответ неполный или ошибочный, но решение содержит промежуточные результаты, перечисленные ниже, то распределение баллов следующее (баллы за отдельные результаты суммируются).
   (a) Указано, что при движении с постоянной скоростью угол φ может принимать значения от $\varphi_{\min}$ до 90° и показано, что минимальное значение угла $\varphi_{\min}$ соответствует максимальному значению коэффициента $k_{\max}$ — **1 балл**.
   (b) Найдено значение угла $\varphi_{\min}$ (с использованием графика), удовлетворяющее неравенству $16° < \varphi_{\min} < 20°$ — **1 балл**.
   (c) Показано, что угол θ может быть больше 90° — **1 балл**.
   (d) Показано, что максимальному значению угла $\theta_{\max}$ соответствует минимальное значение угла $\varphi_{\min}$ — **0,5 балла**.
   (e) Вычислено значение $\theta_{\max}$, удовлетворяющее неравенству $160° < \theta_{\max} < 164°$ — **0,5 балла**.