Условия задач, ответы и критерии оценивания

1. Колебания внутри трубы (10 баллов)
Американский фольклор

Внутри горизонтально расположенной трубы радиусом R, вращающейся с некоторой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, находится небольшое тело. В положении равновесия тело располагается ниже оси трубы, на расстоянии $0{,}8R$ по вертикали от неё. Найдите период малых колебаний тела в плоскости, перпендикулярной оси трубы.

Примечание. Для малого угла δ ($\delta \ll 1$) и произвольного угла α справедливы приближённые равенства: $\sin(\alpha+\delta) \approx \sin\alpha + \delta\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\delta) \approx \cos\alpha - \delta\sin\alpha$.

Ответ: $2\pi\sqrt{\dfrac{4R}{5g}}$.

Критерии

1) Найден коэффициент трения, получена формула $\operatorname{tg}\alpha = \mu$ — *2 балла.*

2) Верно записан второй закон Ньютона для малых колебаний как в решении или с использованием другой обобщённой координаты — *2 балла.*

3) Получено правильное дифференциальное уравнение колебаний как в решении или относительно другой обобщённой координаты — *5 баллов.* Если в процессе вывода уравнения колебаний допущена ошибка при алгебраических преобразованиях — *2 балла.*

4) Получен ответ, верно найден период — *1 балл.*

Решение на основе энергетических соображений оценивается на усмотрение проверяющего, но с учётом распределения баллов, изложенного выше.

2. Стол на тонких ножках (12 баллов),
Бычков А. И.

Стол стоит на горизонтальном полу. Столешницу и пол можно считать абсолютно твёрдыми, а ножки — упругими, подчиняющимися закону Гука при вертикальных деформациях.

Гирю массой 24 кг ставят на стол так, что её центр масс располагается в т. A (см. рисунок, вид сверху). На сколько изменяются силы давления ножек стола: ΔF_1, ΔF_2, ΔF_3 и ΔF_4 на пол после этого? Номера ножек показаны на рисунке.

Ответ: $\Delta F_1 = 100$ Н, $\Delta F_2 = 60$ Н, $\Delta F_3 = 60$ Н, $\Delta F_4 = 20$ Н.

Критерии

1) Записано условие равновесия центра масс стола и гири, получена формула $\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + \Delta F_4 = mg$ — *1 балл.*

2) Записано уравнение моментов для стола относительно оси, проходящей через т. A параллельно короткой стороне, получена формула $\Delta F_1 + \Delta F_2 = 2(\Delta F_3 + \Delta F_4)$ — *2 балла.*

3) Записано уравнение моментов для стола относительно оси, проходящей через т. A параллельно длинной стороне, получена формула $\Delta F_1 + \Delta F_4 = 2(\Delta F_2 + \Delta F_3)$ — *2 балла.*

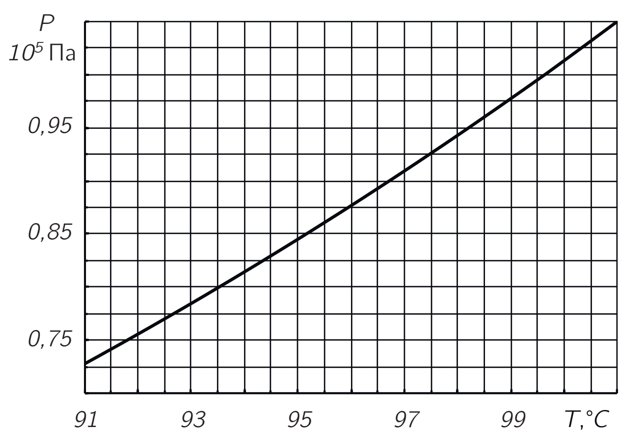
4) Получено соотношение, связывающее деформации ножек при постановке гири $\dfrac{\Delta x_1 + \Delta x_3}{2} = \dfrac{\Delta x_2 + \Delta x_4}{2}$, или аналогичное — *5 баллов.* Если рассуждения приводятся верные, но допущена ошибка при алгебраических преобразованиях — *2,5 балла*

5) Получено уравнение, замыкающее систему уравнений для нахождения сил $\dfrac{\Delta F_1 + \Delta F_3}{2} = \dfrac{\Delta F_2 + \Delta F_4}{2}$, или аналогичное — *1 балл.*

6) Верно найдены числовые ответы — *1 балл.*

3. Вода-пар-вода (14 баллов)
Крюков П. А.

Воде массой $m = 180$ г при постоянном давлении $p_1 = 10^5$ Па сообщают некоторое количество теплоты, так что она превращается в пар и нагревается до температуры $T_1 = 105\,°$C. Далее пар адиабатически расширяется и в какой-то момент приходит в состояние насыщения, после чего конденсируется. График зависимости давления насыщенных паров воды от температуры показан на рисунке ниже.



Считая изменение параметров пара при адиабатическом расширении малым, определите приближённо температуру воды в начале конденсации.

Чему равна суммарная работа пара при его нагревании после испарения и охлаждении до начала конденсации? Молярная теплоёмкость пара при постоянном объёме равна $c_V = 3R$.

Примечание. Учтите, что для малых изменений Δp и ΔV величин p и V справедлива приближённая формула $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$.

<u>Ответ</u>: $T_2 \approx 97{,}5\,^\circ\mathrm{C}$; $A \approx 2{,}32$ кДж.

Критерии

1) Получено линеаризованное уравнение адиабаты для малых изменений $4\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{\Delta p}{p}$ — *6 баллов*. В случае, если при выводе линеаризованного уравнения допущена ошибка в алгебраических преобразованиях, — *3 балла*. Если записано только уравнение состояния для малых изменений, то — *1 балл*

2) Получено приближённое уравнение адиабаты в виде прямой в координатах p и T — *2 балла*.

3) Найдена температура конденсации T_2, при этом полученное значение удовлетворяет неравенству $96{,}7\,^\circ\mathrm{C} < T_2 < 98{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ — *1 балл*. Если найденное значение температуры конденсации T_2 также удовлетворяет неравенству $97{,}0\,^\circ\mathrm{C} < T_2 < 97{,}6\,^\circ\mathrm{C}$ — *+ 1 балл*.

Если никакой линеаризации не проводилось, участник построил зависимость $p(T) = p_1 \cdot \dfrac{T^4}{T_1^4}$, описывающую адиабатический процесс и получил значение температуры конденсации, попадающее в «узкие» ворота ($97{,}0\,^\circ\mathrm{C} < T_2 < 97{,}6\,^\circ\mathrm{C}$), — *10 баллов*. Попадание в «широкие ворота» ($96{,}7\,^\circ\mathrm{C} < T_2 < 98{,}0\,^\circ\mathrm{C}$) — *9 баллов*. Правильные рассуждения, но ошибки при вычислении точек на графике и, как результат, неверно найденное значение температуры конденсации — *6 баллов*.

4) Получено верное соотношение для работы пара $A = \nu R(T_1 - T_\text{п}) + 3\nu R(T_1 - T_2)$ — *3 балла*. Если правильно найдено только одно из слагаемых в соотношении для работы — *1 балл*.

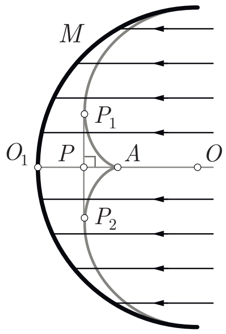
5) Получен числовой ответ для работы пара, удовлетворяющий неравенству $2{,}15$ кДж $< A < 2{,}55$ кДж, — *0,5 балла*. Если полученный ответ также удовлетворяет неравенству $2{,}3$ кДж $< A < 2{,}4$ кДж — *+0,5 балла*.

4. Каустики (18 баллов)

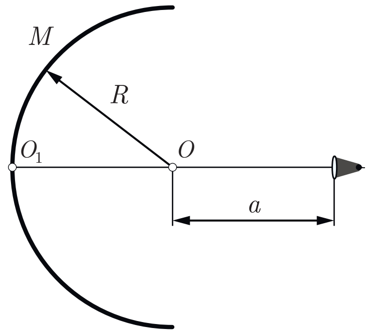
Бычков А. И., Крюков П. А.

Каустика — это огибающая семейства лучей, не пересекающихся в одной точке. В плоском случае, рассматриваемом в этой задаче, каустика — это кривая, которой касаются все лучи, отражающиеся от некоторой поверхности, или испытывающие преломление на некоторой границе раздела. Интенсивность света вблизи каустик возрастает, поэтому кривые каустик хорошо видны невооружённым глазом и на фотографиях.

1. Кривая серого цвета на рисунке — это каустика, образованная после отражения пучка параллельных лучей цилиндрической поверхностью M, радиус которой равен R. Определите расстояние от оси цилиндра т. O до вершины каустики — т. A, а также расстояние PA. OO_1 — ось симметрии, P_1P_2 — касательная к каустике. (*5 баллов*)



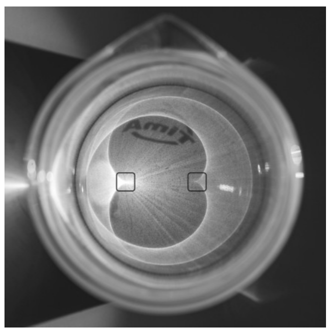
К п. 1



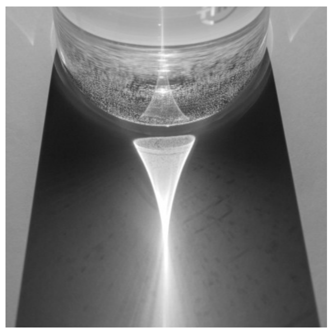
К п. 2

2. Источник, освещающий цилиндрическую поверхность радиусом R, располагается на расстоянии $a = 4R$ от т. O на оси симметрии системы OO_1. Определите расстояние от т. O до вершины каустики, формируемой отражёнными лучами в этом случае. (*4 балла*)

В тонкостенный стеклянный цилиндрический стакан наливают воду и освещают светом фонаря. Ось пучка света составляет разные углы α с горизонтальной поверхностью стола в п. 3 и п. 4. В п. 3 стакан фотографируют сверху (оптическая ось объектива перпендикулярна дну стакана), а освещают справа. В п. 4 ось объектива немного отклоняется от перпендикуляра.



К п. 3



К п. 4

3. Величина угла α около 45°. Вблизи дна стакана наблюдается кривая с двумя вершинами, части которой напоминают кривую из п. 1. На рисунке вершины обведены квадратиками. Объясните наблюдаемую картину. (*3 балла*)

4. Радиус основания стакана равен $R = 8$ см. Фонарь располагается на расстоянии $a \approx 10R$ от оси стакана. Угол α можно считать малым. Снаружи стакана видна каустика, образованная прошедшими через стакан лучами. Определите приближённо расстояние от стакана до вершины каустики (до вершины «конуса»). Показатель преломления воды равен $n \approx 1{,}33$. (*6 баллов*)

Ответ: 1. $AO = \dfrac{R}{2}$, $PA = R\left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)$; 2. $OA = \dfrac{4R}{9}$; 3. Наблюдаются две каустики отражённых лучей. Одна формируется лучами, однократно отразившимися от левой половины стакана. Другая формируется лучами, испытавшими отражение от левой и правой половин стакана. 4. $S = 1{,}5R = 12$ см.

Критерии

1) Получены оба ответа — *5 баллов.* Если правильный только один ответ — *2,5 балла.* Если при ответе на оба вопроса рассуждения верные, но допущены вычислительные ошибки — *2,5 балла.* Если высказано соображение, что при расчёте следует использовать тот факт, что лучи касаются каустики, но больше ничего не сделано — *1 балл.*

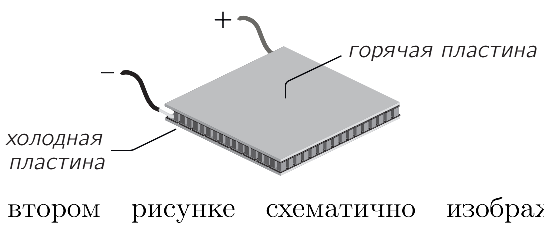
2) Получен верный ответ — *4 балла.* Если рассуждения верные (предлагается использовать формулу линзы или рассматривать отражение лучей в параксиальном приближении), но допущены вычислительные ошибки — *2 балла.* Если высказано соображение, что при расчёте следует использовать тот факт, что лучи касаются каустики, но больше ничего не сделано — *1 балл.*

3) В любом виде высказано соображение, что каустик две, и они сформированы отражёнными лучами — *3 балла.*

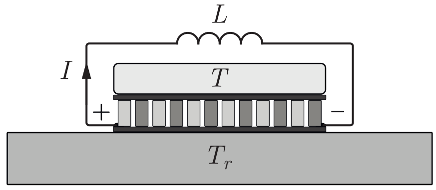
4) Получен верный ответ — *6 баллов.* Если рассуждения верные (предлагается представить цилиндр в виде «толстой» линзы или рассматривать преломление лучей в параксиальном приближении), но допущены вычислительные ошибки — *3 балла.* Если высказано соображение, что при расчёте следует использовать тот факт, что лучи касаются каустики, но больше ничего не сделано — *1 балл.* Если при решении считалось, что источник находится на бесконечности, при этом выкладки сделаны верно и получен ответ $S = R$ — *5 баллов.* То же самое, но с вычислительными ошибками — *2,5 балла.*

5. Тепловой индуктор (18 баллов), Крюков П. А.

Элемент Пельтье состоит из двух пластин, разделённых большим количеством полупроводниковых блоков (рис. из «Википедии» ниже), и представляет собой преобразователь электрической энергии в тепловую. Он также может работать и в обратном режиме — вырабатывать ЭДС при наличии разности температур на пластинах.



На втором рисунке схематично изображено устройство на основе элемента Пельтье. Нижняя пластина находится в контакте с «тепловым резервуаром» — большим телом, температуру которого T_r можно считать постоянной. Верхняя пластина контактирует с телом с теплоёмкостью C и температурой T, которая изменяется со временем. Сверхпроводящая катушка с индуктивностью L включена между контактами элемента. В начальный момент: $T = T_0$, $T_0 > T_r$.



В данных условиях верхнее тело отдаёт элементу за время Δt количество теплоты $\Delta Q = \alpha T I \Delta t$, где α — постоянный коэффициент, I — ток через элемент. Положительным направлением тока считается направление от «плюса» к «минусу». Элемент Пельтье при этом вырабатывает ЭДС, которая равна $\mathscr{E} = \alpha(T - T_r)$. Полярность создаваемой ЭДС (для $T > T_r$) совпадает с указанной на рисунке. Сопротивление элемента Пельтье равно R.

Оказывается, в рассматриваемой системе возможно периодическое изменение температуры тела $T(t)$ и тока в цепи $I(t)$. В задаче предлагается исследовать колебания тока и температуры при различных значениях параметров: T_r, T_0, C, α, R, которые считаются известными. Ток в цепи в начальный момент равен нулю: $I(0) = 0$. Разность температур тела и резервуара можно считать малой: $|T - T_r| \ll T_r$ в любой момент времени.

1. Рассмотрим идеализированный, фантастический случай, когда сопротивление R равно нулю и теплообмен между тепловым резервуаром и телом за счёт теплопроводности отсутствует.

1a) Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$. (*2 балла*)

1b) Преобразуйте полученное уравнение с учётом условия $|T - T_r| \ll T_r$ и найдите частоту ω_0 колебаний тока. (*3 балла*)

1c) Найдите зависимость температуры тела от времени $T(t)$. (*1 балл*)

2. Физически случай, описанный в п. **1**, никогда не реализуется. Рассмотрим параметры системы, близкие к реальности. Пусть известно сопротивление элемента R, мощность передачи тепла от тела резервуару определяется соотношением $P = k(T - T_r)$, где k — известный коэффициент, а Джоулево тепло, выделяющееся в элементе, делится поровну между пластинами. В этом случае колебания будут затухающими.

2a) Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$ в этом случае. (*3 балла*)

2b) Покажите, что нелинейными слагаемыми, пропорциональными I^2 и $I\dot{I}$, (точка сверху обозначает производную по времени) в уравнении из п. 2a) можно пренебречь и преобразуйте полученное уравнение к виду $\ddot{I}+2\gamma\dot{I}+\omega^2 I = 0$ (уравнение затухающих колебаний). Чему равны коэффициенты γ и ω? (*4 балла*)

2c) Полагая затухание слабым ($\gamma^2 \ll \omega^2$), определите относительное изменение амплитуды тока за период $\dfrac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}}$. Ответ выразите через коэффициенты γ и ω. (*3 балла*)

3. Предлагается создать на основе данного устройства установку для точного измерения теплоёмкости тел. Параметры: T_r, α, k, R, L известны. Их измерили раньше с высокой точностью. В распоряжении экспериментатора есть электроизмерительные приборы, осциллограф и генератор переменного напряжения, частоту которого можно менять в широком диапазоне. Опишите в двух словах возможную схему эксперимента. (*2 балла*)

Ответ: 1) $LC\ddot{I} + \alpha^2 T_r I + \alpha L\dot{I}I = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\alpha^2 T_0}{CL}}$; $T(t) = (T_0 - T_r)\cos\omega_0 t + T_r$.

2) $LC\ddot{I} + (RC + kL)\dot{I} + (kR + \alpha^2 T_r)I + \alpha L\dot{I}I + \alpha\dfrac{I^2 R}{2} = 0$; $\quad \gamma = \dfrac{R}{2L} + \dfrac{k}{2C}, \quad \omega = \sqrt{\dfrac{kR}{LC} + \dfrac{\alpha^2 T_r}{LC}}$; $\dfrac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}} = 2\pi\dfrac{\gamma}{\omega^2}$.

3) Следует поставить эксперимент, в котором можно было бы измерить частоту ω. Возможная схема эксперимента: в цепь включают генератор, а осциллограф подключают к катушке, измеряют резонансную частоту.

Критерии

Общее пожелание: при проверке данной задачи не учитывать error propagation — распространение ошибки, допущенной при вычислении некоторых начальных величин, на итоговый результат.

1a) Получено верное дифференциальное уравнение — *2 балла*. Если исходные уравнения записаны правильно, но больше ничего не сделано — *1 балл*

1b) Уравнение преобразовано, показано, что нелинейным слагаемым можно пренебречь, найдена частота — *3 балла*. Если нелинейное слагаемое исключается без объяснений, всё остальное правильно — *1,5 балла*. Если рассуждения верные, но допущены вычислительные ошибки — *2 балла*

1c) Зависимость найдена верно — *1 балл*. Если рассуждения верные, но допущены вычислительные ошибки — *0,5 балла*.

2a) Получено верное дифференциальное уравнение — *3 балла*. Если уравнение в целом правильное, но какие-то слагаемые потеряны — *1,5 балла*. Если исходные уравнения записаны правильно, но больше ничего не сделано — *2 балла*

2b) Уравнение преобразовано, показано, что нелинейными слагаемыми можно пренебречь, найдены частота ω и декремент затухания γ — *4 балла*. Если нелинейное слагаемое исключается без объяснений, всё остальное правильно — *2 балла*. Если рассуждения верные, но допущены вычислительные ошибки — *2,5 балла*

2c) Верно определено относительное изменение амплитуды за период (даже если отсутствует вывод формулы) — *3 балла*. Если рассуждения в целом верные, но допущены ошибки при вычислениях — *1,5 балла*.

3) В любом виде высказано соображение, что надо измерять резонансную частоту (или снимать резонансную кривую), изображена (или описана словами) схема установки (не обязательно такая, как в ответе) — *2 балла*. Если высказано соображение, что измерять следует частоту, но не указано как именно — *1 балл*.