



## Условия задач, ответы и критерии оценивания

**1. Колебания внутри трубы (10 баллов)**

Американский фольклор

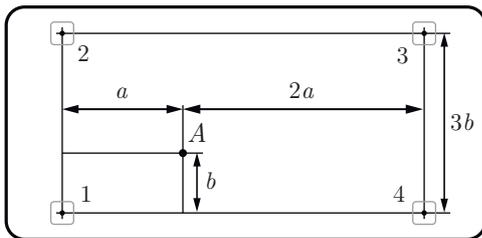
Внутри горизонтально расположенной трубы радиусом  $R$ , вращающейся с некоторой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, находится небольшое тело. В положении равновесия тело располагается ниже оси трубы, на расстоянии  $0,8R$  по вертикали от неё. Найдите период малых колебаний тела в плоскости, перпендикулярной оси трубы.

*Примечание.* Для малого угла  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ) и произвольного угла  $\alpha$  справедливы приближённые равенства:  $\sin(\alpha + \delta) \approx \sin \alpha + \delta \cos \alpha$ ,  $\cos(\alpha + \delta) \approx \cos \alpha - \delta \sin \alpha$ .

**2. Стол на тонких ножках (12 баллов),**

Бычков А. И.

Стол стоит на горизонтальном полу. Столешница и пол можно считать абсолютно твёрдыми, а ножки — упругими, подчиняющимися закону Гука при вертикальных деформациях.



Гирю массой 24 кг ставят на стол так, что её центр масс располагается в т.  $A$  (см. рисунок, вид сверху). На сколько изменяются силы давления ножек стола:  $\Delta F_1$ ,  $\Delta F_2$ ,  $\Delta F_3$  и  $\Delta F_4$  на пол после этого? Номера ножек показаны на рисунке.

**3. Вода-пар-вода (14 баллов)**

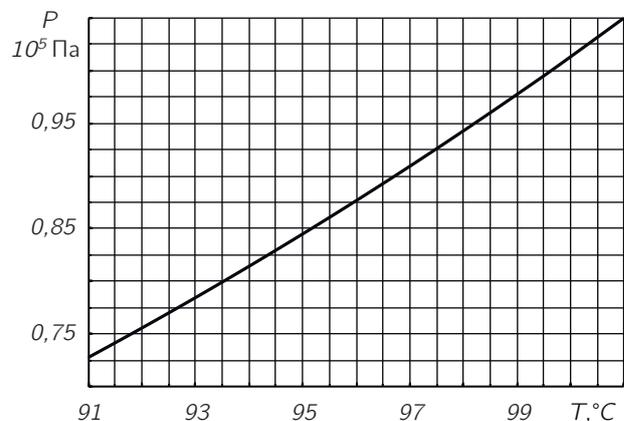
Крюков П. А.

Воде массой  $m = 180$  г при постоянном давлении  $p_1 = 10^5$  Па сообщают некоторое количество теплоты, так что она превращается в пар и нагревается до температуры  $T_1 = 105^\circ\text{C}$ . Далее пар адиабатически расширяется и в какой-то момент приходит в состояние насыщения, после чего конденсируется. График зависимости давления насыщенных паров воды от температуры показан на рисунке ниже.

Считая изменение параметров пара при адиабатическом расширении малым, определите приближённо температуру воды в начале конденсации.

Чему равна суммарная работа пара при его нагревании после испарения и охлаждении до начала конденсации? Молярная теплоёмкость пара при постоянном объёме равна  $c_V = 3R$ .

*Примечание.* Учтите, что для малых изменений  $\Delta p$  и  $\Delta V$  величин  $p$  и  $V$  справедлива приближённая формула  $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$ .

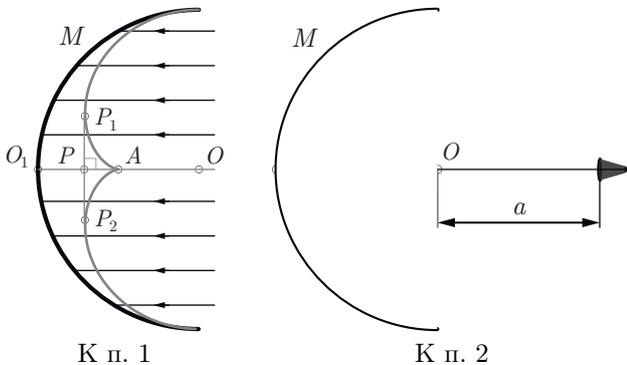


#### 4. Каустики (18 баллов)

Бычков А. И., Крюков П. А.

Каустика — это огибающая семейства лучей, не пересекающихся в одной точке. В плоском случае, рассматриваемом в этой задаче, каустика — это кривая, которой касаются все лучи, отражающиеся от некоторой поверхности, или испытывающие преломление на некоторой границе раздела. Интенсивность света вблизи каустик возрастает, поэтому кривые каустик хорошо видны невооружённым глазом и на фотографиях.

1. Кривая серого цвета на рисунке — это каустика, образованная после отражения пучка параллельных лучей цилиндрической поверхностью  $M$ , радиус которой равен  $R$ . Определите расстояние от оси цилиндра  $t. O$  до вершины каустики —  $t. A$ , а также расстояние  $PA$ .  $OO_1$  — ось симметрии,  $P_1P_2$  — касательная к каустике. (5 баллов)

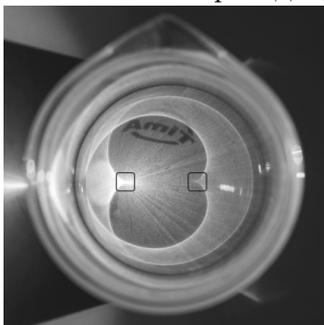


К п. 1

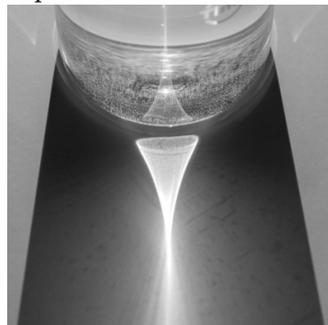
К п. 2

2. Источник, освещающий цилиндрическую поверхность радиусом  $R$ , располагается на расстоянии  $a = 4R$  от  $t. O$  на оси симметрии системы  $OO_1$ . Определите расстояние от  $t. O$  до вершины каустики, формируемой отражёнными лучами в этом случае. (4 балла)

В тонкостенный стеклянный цилиндрический стакан наливают воду и освещают светом фонаря. Ось пучка света составляет разные углы  $\alpha$  с горизонтальной поверхностью стола в п. 3 и п. 4. В п. 3 стакан фотографируют сверху (оптическая ось объектива перпендикулярна дну стакана), а освещают справа. В п. 4 ось объектива немного отклоняется от перпендикуляра.



К п. 3



К п. 4

3. Величина угла  $\alpha$  около 45

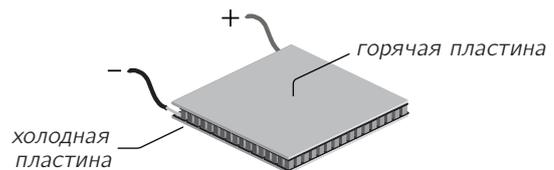
°. Вблизи дна стакана на наблюдается кривая с двумя вершинами, части которой напоминают кривую из п. 1. На рисунке вершины обведены квадратиками. Объясните наблюдаемую картину. (3 балла)

4. Радиус основания стакана равен  $R = 8$  см. Фонарь располагается на расстоянии  $a \approx 10R$  от оси стакана. Угол  $\alpha$  можно считать малым. Снаружи стакана видна каустика, образованная прошедшими через стакан лучами. Определите приблизительно расстояние от стакана до вершины каустики (до вершины «конуса»). Показатель преломления воды равен  $n \approx 1,33$ . (6 баллов)

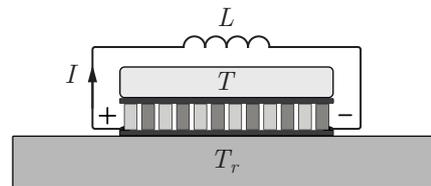
#### 5. Тепловой индуктор (18 баллов),

Крюков П. А.

Элемент Пельтье состоит из двух пластин, разделённых большим количеством полупроводниковых блоков (рис. из «Википедии» ниже), и представляет собой преобразователь электрической энергии в тепловую. Он также может работать и в обратном режиме — вырабатывать ЭДС при наличии разности температур на пластинах.



На втором рисунке схематично изображено устройство на основе элемента Пельтье. Нижняя пластина находится в контакте с «тепловым резервуаром» — большим телом, температуру которого  $T_r$  можно считать постоянной. Верхняя пластина контактирует с телом с теплоёмкостью  $C$  и температурой  $T$ , которая изменяется со временем. Сверхпроводящая катушка с индуктивностью  $L$  включена между контактами элемента. В начальный момент:  $T = T_0$ ,  $T_0 > T_r$ .



В данных условиях верхнее тело отдаёт элементу за время  $\Delta t$  количество теплоты  $\Delta Q = \alpha TI \Delta t$ , где  $\alpha$  — постоянный коэффициент,  $I$  — ток через элемент. Положительным направлением тока считается направление от «плюса» к «минусу». Элемент Пельтье при этом вырабатывает ЭДС, которая равна  $\mathcal{E} = \alpha(T - T_r)$ . Полярность создаваемой ЭДС (для  $T > T_r$ ) совпадает с указанной на рисунке. Сопротивление элемента Пельтье равно  $R$ .

Оказывается, в рассматриваемой системе возможно периодическое изменение температуры тела  $T(t)$  и тока в цепи  $I(t)$ . В задаче предлагается исследовать колебания тока и температуры при

различных значениях параметров:  $T_r$ ,  $T_0$ ,  $C$ ,  $\alpha$ ,  $R$ , которые считаются известными. Ток в цепи в начальный момент равен нулю:  $I(0) = 0$ . Разность температур тела и резервуара можно считать малой:  $|T - T_r| \ll T_r$  в любой момент времени.

1. Рассмотрим идеализированный, фантастический случай, когда сопротивление  $R$  равно нулю и теплообмен между тепловым резервуаром и телом за счёт теплопроводности отсутствует.

1а) Получите дифференциальное уравнение для функции  $I(t)$ . (2 балла)

1б) Преобразуйте полученное уравнение с учётом условия  $|T - T_r| \ll T_r$  и найдите частоту  $\omega_0$  колебаний тока. (3 балла)

1с) Найдите зависимость температуры тела от времени  $T(t)$ . (1 балл)

2. Физически случай, описанный в п. 1, никогда не реализуется. Рассмотрим параметры системы, близкие к реальности. Пусть известно сопротивление элемента  $R$ , мощность передачи тепла от тела резервуару определяется соотношением  $P = k(T - T_r)$ , где  $k$  — известный коэффициент, а Джоулево тепло, выделяющееся в элементе, делится поровну между пластинами. В этом случае колебания будут затухающими.

2а) Получите дифференциальное уравнение для функции  $I(t)$  в этом случае. (3 балла)

2б) Покажите, что нелинейными слагаемыми, пропорциональными  $I^2$  и  $I\dot{I}$ , (точка сверху обозначает производную по времени) в уравнении из п. 2а) можно пренебречь и преобразуйте полученное уравнение к виду  $\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = 0$  (уравнение затухающих колебаний). Чему равны коэффициенты  $\gamma$  и  $\omega$ ? (4 балла)

2с) Полагая затухание слабым ( $\gamma^2 \ll \omega^2$ ), определите относительное изменение амплитуды тока за период  $\frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}}$ . Ответ выразите через коэффициенты  $\gamma$  и  $\omega$ . (3 балла)

3. Предлагается создать на основе данного устройства установку для точного измерения теплоёмкости тел. Параметры:  $T_r$ ,  $\alpha$ ,  $k$ ,  $R$ ,  $L$  известны. Их измерили раньше с высокой точностью. В распоряжении экспериментатора есть электроизмерительные приборы, осциллограф и генератор переменного напряжения, частоту которого можно менять в широком диапазоне. Опишите в двух словах возможную схему эксперимента. (2 балла)