МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ. 2020–2021 УЧ. Г. ОЧНЫЙ ЭТАП. 8–9 КЛАССЫ

Решения и критерии оценивания

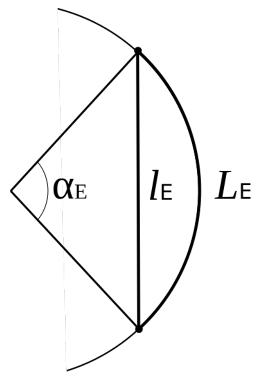
Задача 1

Для какой планеты расстояние между начальным и конечным положениями на орбите спустя 1000 (земных) суток больше: для Венеры или для Земли? Орбиты планет считать круговыми. Ответ объясните.

Решение

За 1000 суток Земля совершает $\left\lfloor \frac{1000}{365.3} \right\rfloor = 2$ полных оборота и ещё 0.737 часть оборота. Поскольку нас интересует расстояние между двумя точками, то стоит выбрать недостающие 0.263 оборота. Эта величина соответствует центральному углу α_E = 0.263 · 360° = 94.68°. Поскольку полная длина земной орбиты 2π а.е., то до конца третьего оборота Земле нужно пройти расстояние $L_E = 2\pi \cdot 0.263 \approx 1.64$ а.е. Однако, это длина дуги орбиты, тогда как расстояние между точками является отрезком. Длина этого отрезка равна

$$l_E = 2 \cdot 1\,\text{а.е.} \cdot \sin\left(\frac{94.68°}{2}\right) \approx 1.47\,\text{а.е.}$$



Проведём аналогичные вычисления для Венеры. За 1000 суток Венера совершит $\left\lfloor \frac{1000}{224.7} \right\rfloor = 4$ полных оборота и примерно 0.450 часть пятого. Этой части пути соответствует дуга длиной $2\pi \cdot 0.72 \cdot 0.450 \approx 2.04$ а.е. Искомая длина хорды равна

$$l_V = 2 \cdot 0.72\,\text{а.е.} \cdot \sin\left(\frac{0.45 \cdot 360°}{2}\right) \approx 1.42\,\text{а.е.}$$

Искомые расстояния примерно равные, но для Земли оно немного больше.

Критерии проверки

Вычисление доли орбитального периода, прошедшей после последнего прохождения начальной точки, оценивается в **1 балл** для каждой планеты. Вычисление величины центрального угла, опирающегося на начальную и конечную точки оценивается в **1 балл** для каждой планеты. Определение расстояния между начальной и конечной точкой оценивается в **1 балл**. Правильный итоговый вывод оценивается в **2 балла**. Если вывод делается на основании длин дуг, а не хорд, то оценка за последний этап не выставляется.

Максимальная оценка — **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев, Е. Н. Фадеев)

Задача 2

Найдите среднее расстояние между частицами в кольце В Сатурна. Во сколько раз оно больше, чем средний размер частиц?

Внутренний радиус кольца R равен 92000 км, ширина W = 25500 км, толщина H = 10 м, масса M =2,4 · 10^{19} кг. Кольцо состоит из ледяных частиц размером (диаметром) d = 1 см.

Решение

Найдём объем кольца V. Геометрически — это цилиндр без центральной части. Объем цилиндра вычисляется как площадь его основания, умноженная на высоту, следовательно:

$$V=\pi(R+W)^2 H-\pi R^2 H=\pi H(2RW+W^2).$$

Подставив значения из условия, получим $V\approx 1.7\cdot 10^{17}\,\text{м}^3=1.7\cdot 10^{23}\,\text{см}^3$.

Будем считать ледяные частицы шарами. Тогда объем одной частицы

$$V_1=\frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8}\approx 0.5\,\text{см}^3.$$

Плотность льда в условии не дана, но все прекрасно знают, что лёд плавает по поверхности воды, т. е. его плотность немного меньше. Если плотность воды 1000 кг/м^3 = 1 г/см^3, то разумная величина для льда $\rho_{\text{льда}}$ = 0.9 г/см^3. Получается, что льдом занят объём $V_2=\frac{M}{\rho_{\text{льда}}}=2.6\cdot 10^{22}\,\text{см}^3$.

Полное число частиц равно $N=\frac{V_2}{V_1}=5.2\cdot 10^{22}$, при этом на каждую частицу приходится объем $V_3=V/N=3.3\,\text{см}^3$, радиусом

$$r=\frac{\sqrt[3]{3V_3}}{4\pi}\approx 0.9\,\text{см}.$$

Среднее расстояние оказывается вдвое больше этой величины: 2r = 1.8 см = 1.8 d.

Критерии проверки

Определение объёма кольца — **2 балла**. Вычисление числа частиц оценивается в **4 балла**: **2 балла** — за определение объёма, занятого льдом, **1 балл** — за объём частицы и **1 балл** —собственно за число частиц. Ещё **2 балла** выставляются за вычисление окончательного ответа.

Поскольку плотность льда не дана, то участник должен вспомнить её или предположить разумную величину (от 0.8 до 1 г/см^3). Если величина не попадает в это диапазон, то оценка уменьшается на **1 балл.**

Поскольку задача имеет оценочный характер, форма частиц может приниматься произвольной, в т.ч. и кубической. Если нет противоречий в решении, то это вполне допустимо. Ответ, разумеется, в этом случае получится немного другим.

Максимальная оценка за задачу — **8 баллов**.

(М. В. Силантьев)

Задача 3

Представим себе мир через несколько миллиардов лет. Продолжительность тропического года составляет ровно 365.25 современных суток, а вокруг своей оси Земля вращается за 36 часов 20 минут (современных). Новая цивилизация, живущая на Земле, также, как и мы, пользуется семидневной неделей и 12 одинаковыми (почти) месяцами. Посчитайте, сколько новых суток составляют календарный год и месяц? Как часто нужно вводить високосный год, чтобы ошибка в один день накапливалась не менее чем за 1000 лет? Календарный цикл должен быть короче 50 лет или должен быть устроен по принципу григорианского.

Решение

Заметим, что в условии дан период обращения Земли вокруг своей оси, т. е. звёздные сутки. В одном тропическом году будущего 365.25 · 24 = 8766 часов. Следовательно звёздных суток в году будет

$$N_{зг} = \frac{8766}{36\frac{1}{3}} \approx 241.266055 \, .$$

Солнечных суток в году на 1 меньше, чем звёздных: $N_г \approx$ 240.266055. Таким образом, обычный календарный год состоит из 240 суток, а високосный — из 241. На один месяц приходится

$$N_м = \frac{240}{12} = 20 \text{ суток,}$$

а в високосном году один месяц будет содержать 21 сутки.

Теперь разрешим вопрос о системе високосных лет. Здесь можно придумать несколько вариантов решения. Для начала воспользуемся схемой, которой, возможно, пользовался Луиджи Лило при составлении григорианского календаря. Дробная часть $N_г$ близка к 0.25. Поэтому в первом приближении разумно вставлять дополнительный день раз в 4 года. Тогда средняя продолжительность календарного года составит 241.25 суток. Она меньше истинной величины на 0.016055. Значит ошибка в 1 день накопится за чуть более чем за 62 года. Если теперь раз в 62 года делать дополнительный високосный год, то средняя продолжительность года составит

$$241+\frac{1}{4}+\frac{1}{62}=241\frac{33}{124}\approx 241.266129\,,$$

что превосходит истинное значение всего на 0.000074. В этом случае ошибка в 1 день накопится примерно за 13500 лет, что удовлетворяет условию задачи.

Стоит отметить, что если добавлять недостающий високосный день каждые 60 или 64 года вместо 62 лет, календарь получится менее точным, но всё ещё удовлетворяющим условию.

Можно идти к цели другим путём. Дробную часть $N_г$ можно представить в виде дроби $\frac{266055}{1000000}=\frac{53211}{200000}$. Если мы хотим, чтобы наш календарный год в среднем был равен $N_г$, то необходимо за миллион лет добавить 266055 високосных дней или 53211 високосных дней за 200000 лет. Очевидно, этот календарный цикл слишком длинен. Но нам не обязательно нужно точное совпадение календарного и тропического года.

Поскольку нам нужен календарь с ошибкой не превышающей 1 день за 1000 лет, то достаточно найти подходящую дробь, отличающуюся менее чем на одну тысячную от 0.266055. Тогда первым приближением может служить $\frac{266}{1000}=\frac{133}{500}$. Заметим, что числитель и знаменатель отличаются примерно вчетверо. Уменьшим числитель на единицу, а знаменатель на четыре. Значение дроби не должно сильно измениться, а саму дробь может быть удастся упростить. Получаем $\frac{132}{496}=\frac{33}{124}$. Тридцать три високосных дня за 124 год. Этот ответ мы получали раньше, но в данном случае такая схема неприменима, поскольку календарный цикл 124 года значительно превышает 50 лет, данные в условии задачи. Снова вычтем 1 из числителя и 4 из знаменателя. Получим $\frac{32}{120}=\frac{4}{15}$. Добавляя по 4 дополнительных дня каждые 15 лет, например в 4-й, 8-й, 12-й и 15-й года цикла, получим календарь, ошибка которого составляет 1 день за 1635 лет, что полностью удовлетворяет условию задачи.

Критерии проверки

Вычисление продолжительности года в новых сутках оценивается в **2 балла** (если не учтена разница между звёздными и солнечными сутками, то **1 балл**), продолжительности месяца — ещё в **2 балла**. Подбор правильной схемы интеркаляций — **4 балла**. Если выбрана разумная схема, но её ошибка больше требуемой, то оценка за этап не может превышать **2 балла**. За простое чередование 1 високосный и 3 невисокосных года выставляется **1 балл**.

Максимальная оценка за задачу — **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 4

Кратная система состоит из четырёх звёзд, подобных Солнцу, образующих две тесные пары, обращающиеся вокруг общего центра масс. Все орбиты круговые. Из окрестностей звезды 1 звезда 2 имеет видимый блеск -25^m, а блеск каждой из звёзд 3 и 4 составляет -15^m. Определите период обращения в системе звёзд 1 и 2 и период обращения обеих пар вокруг общего центра масс в годах. Абсолютную звёздную величину Солнца принять равной 5^m.

Решение

Видимая звёздная величина звезды 2 примерно на 30^m превышает абсолютную, а звёзд 3 и 4 — на 20^m. По определению, разнице в 5 звёздных величин соответствует отношение освещённостей в 100 раз. Значит от звезды 2 приходит в 100^6 больше фотонов, чем от неё же, если она расположена на расстоянии 10 пк. Аналогично, от звёзд 3 и 4 приходит в 100^4 больше. Поскольку освещённость обратно пропорциональна квадрату расстояния, расстояние до звезды 2 меньше десяти парсек в 10^6 раз, а расстояние до звёзд 3 и 4 — в 10^4 раз.

В одном парсеке примерно 206265 а.е. Тогда расстояние до звезды 2 составляет

$$d_1 = 206265 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \approx 2\,\text{а.е.}\,,$$

а до звёзд 3 и 4 —

$$d_2 = 206265 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \approx 206\,\text{а.е.}$$

Звезды 3 и 4 находятся достаточно далеко от звёзд 1 и 2. Поэтому их влияние мало и можно считать, что звезды 1 и 2 движутся в соответствии с законами Кеплера. Применим третий закон Кеплера с учётом соотношения масс, сравнивая систему двух звёзд с системой Земля-Солнце. Тогда

$$\left(\frac{T_1}{1\,\text{год}}\right)^2 = \frac{M_\odot}{2M_\odot}\left(\frac{d_1}{1\,\text{а.е.}}\right)^3 = 4\,,$$

откуда $T_1 = 2$ года.

При рассмотрении движения пар относительно общего центра масс системы звёздные пары можно рассматривать как материальные точки с массами, равными суммам масс соответствующих компонентов. Тогда

$$\left(\frac{T_2}{1\,\text{год}}\right)^2 = \frac{M_\odot}{4M_\odot}\left(\frac{d_2}{1\,\text{а.е.}}\right)^3 \approx 2.2 \cdot 10^6\,,$$

откуда $T_2 \approx 1500$ лет.

Критерии проверки

Указание на то, что разница в 5 звёздных величин соответствуют отношению освещённостей в 100 раз — **1 балл**. Зависимость освещённости от квадрата расстояния — **1 балл**. Участник вместо этого может использовать формулу Погсона. Если формула записана верно, то это оценивается **2 баллами**. В случае ошибочного использования следует обратить внимание на то, описывает ли формула участника указанные выше две зависимости. Правильное вычисление расстояния до звёзд оценивается в **1 балл** за каждое. За первую часть задачи максимальный балл — **4**.

Верная запись третьего закона Кеплера (с массами) оценивается в **2 балла**. Если участник использует простую версию формулы (без масс), то выставляется **1 балл** и дальнейшие вычисления не оцениваются. Правильное вычисление искомых периодов оценивается по **1 баллу** за каждый. Максимальный балл за вторую часть задачи — **4**.

(О. С. Угольников)

Задача 5

Древнегреческий астроном Евктемон в V в. до н. э. впервые обнаружил неравенство времён года, т. е. различие промежутков времени между соседними равноденствиями и солнцестояниями. Объяснение этому факту дал другой греческий астрономом Гиппарх Никейский, живший во II в. до н.э. Он предположил, что Солнце равномерно движется по круговой орбите, но Земля находится не в центре этой орбиты, а смещена на некоторое расстояние. Гиппарх назвал эксцентриситетом отношение смещения Земли из центра солнечной орбиты к радиусу этой орбиты. Пользуясь данными о равноденствиях и солнцестояниях в 2019-20 годах определите вслед за Гиппархом длительность времён года и «эксцентриситет» орбиты Солнца.

20 марта 2019 21:58	21 июня 2019 15:54
23 сентября 2019 07:50	22 декабря 2019 04:19
20 марта 2020 03:51	

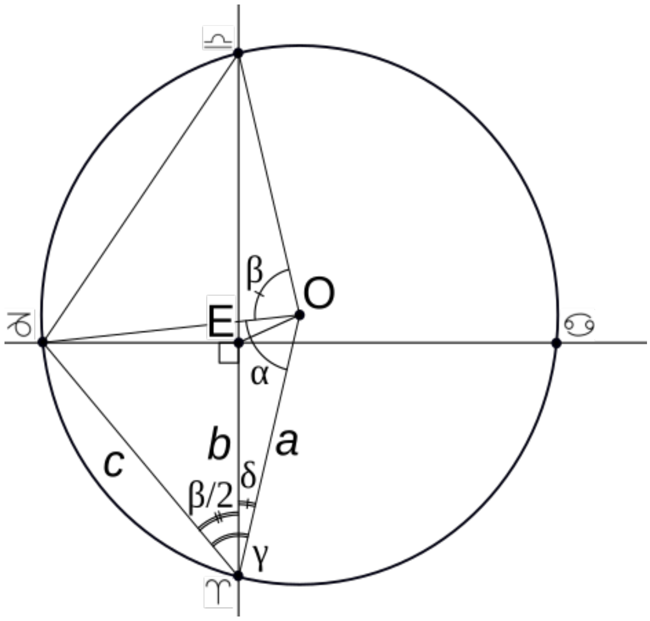
Решение

Из данных в условии определим продолжительность астрономических сезонов.

От дня весеннего равноденствия до дня летнего солнцестояния прошло 11 дней марта, 30 дней апреля 31 день мая и 21 день июня. Всего 93 дня. Но равноденствие произошло в 21:58, а солнцестояние в 15:54, т. е. на 6 часов и 4 минуты раньше. Значит астрономическая весна длилась 92 дня 17 часов 56 минут или 92.75 сут.

Аналогично находим, что длительность лета составила 93 дня 15 часов 56 минут или 93.664 суток, осени — 89 дней 20 часов 29 минут или 89.853 суток, а зимы — 88 дней 23 часа 32 минуты или 88.981 суток. При расчёте длительности зимы важно не забыть, что 2020 год был високосным.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется рисунок. Пусть Солнце движется по окружности с центром O. Согласно теории Гиппарха Земля располагается в точке E не совпадающей с O, но находящейся внутри окружности. Проведём через точку E две перпендикулярные прямые. Они пересекут окружность в четырёх точках: точках весеннего ♈ и осеннего ♎ равноденствий и летнего ♋ и зимнего ♑ солнцестояний. Поскольку точка E расположена не в центре, то отсекаемые дуги оказываются неравными.



Рассмотрим четырёхугольник ♈O♎♑. В нем стороны ♎O, ♈O и ♑O равны, поскольку это радиусы окружности. Обозначим их длину *a*. Угол ♈O♑ равен

$$\alpha = \frac{88.981}{365.25} \times 360° \approx 87.7°.$$

Поскольку треугольник ♈O♑ равнобедренный, сторона ♈♑ равна $c = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$. Угол ♑O♎ равен

$$\beta = \frac{89.853}{365.25} \times 360° \approx 88.56°.$$

Угол ♑♈O равен γ = 90° − α/2. Треугольник ♈O♎ также равнобедренный, поэтому угол ♎♈O равен δ = 90° − (α + β)/2. Наконец, угол E♈♑ равен $\gamma - \delta = \beta/2$. Поскольку треугольник E♈♑ прямоугольный, сторона E♈ равна

$$b = c\cos\frac{\beta}{2} = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Тогда из теоремы косинусов для треугольника EO♈ получаем

$$\mathrm{EO} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta = \sqrt{a^2 + 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 4a^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \approx 0.0335\,a.$$

В итоге мы получили «эксцентриситет» равным e = 0.0335. В действительности, эксцентриситет эллиптической земной орбиты вокруг Солнца вдвое меньше, всего 0.017.

Критерии проверки

Определение длительности каждого из сезонов — по **1 баллу**. Если не был учтён високосный день, то оценка за определение длительности зимы снижается на **1 балл**.

Вычисление эксцентриситета: за правильные формулы — **3 балла**, вычисление правильного ответа — **1 балл**. В случае ошибок в определении длительности сезонов, приведших к ошибке вычисления эксцентриситета, последний балл не ставится.

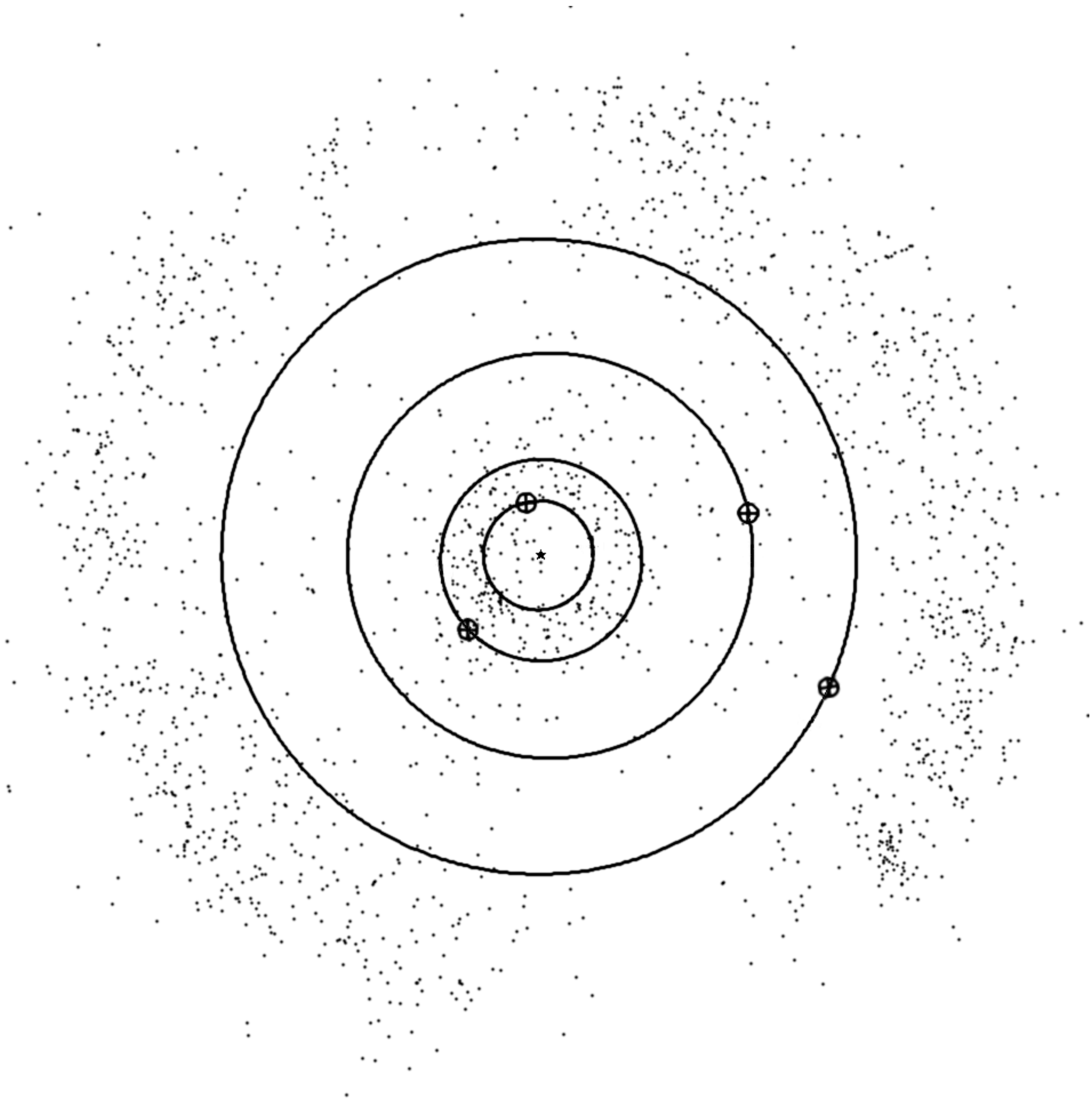
Максимальная оценка за задачу — **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 6

На рисунке показано положение (вид с северного полюса эклиптики) четырёх планет-гигантов и окружающих их астероидов в некоторый момент времени в предыдущем десятилетии (показаны только кентавры и объекты пояса Койпера). Показаны только астероиды, известные на момент наблюдения. Из этого рисунка определите:

- причину, по которой в нижней части пояса Койпера наблюдается пробел в распределении астероидов;
- в каком созвездии наблюдалась каждая планета;
- дату наблюдения с точностью до полугода.



Решение

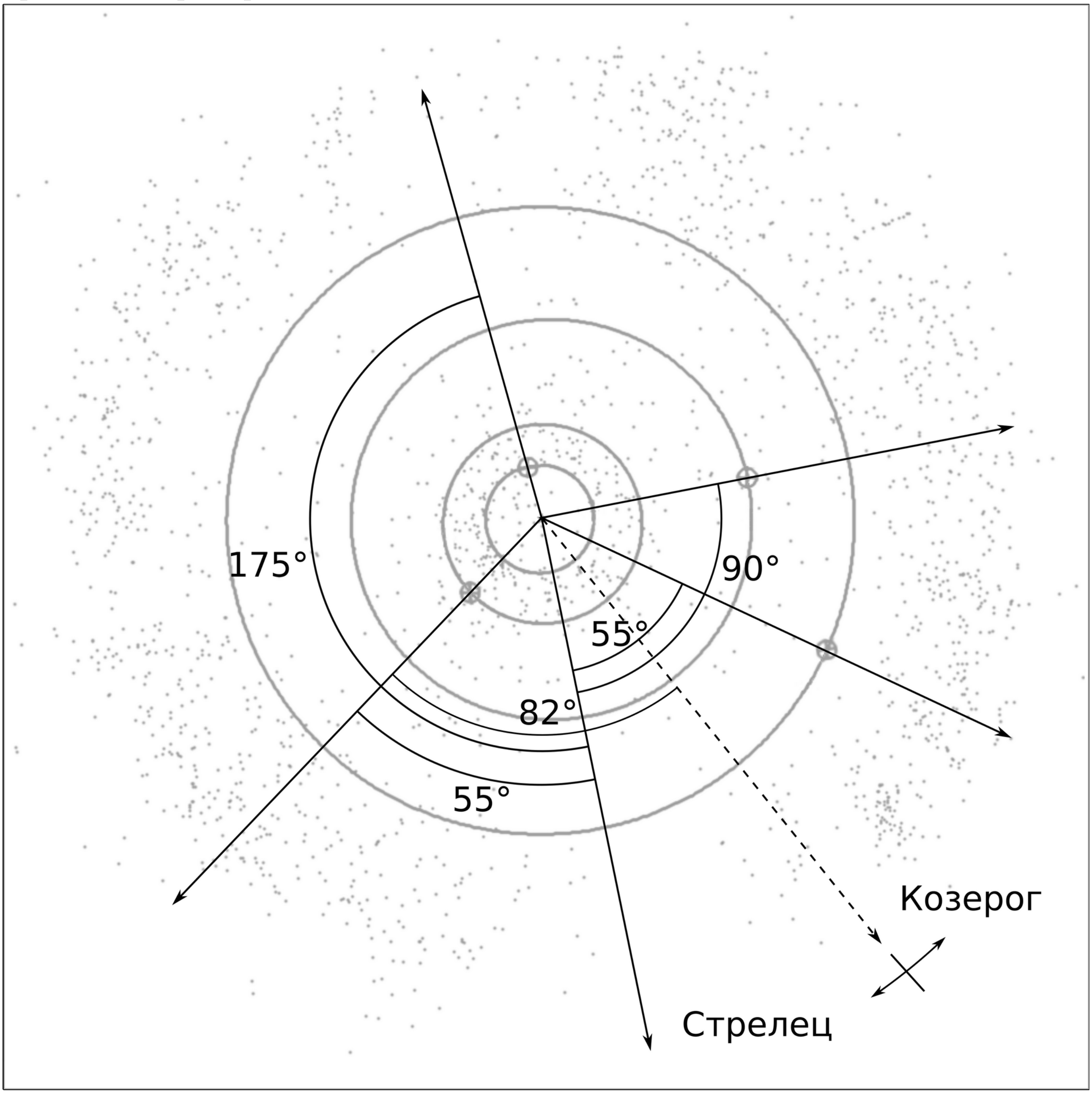
Обратим внимание, что в части пояса Койпера, противоположной указанному в условии пробелу (наверху изображения), также астероидов меньше, чем справа или слева. Для кентавров, расположенных вблизи орбит Юпитера и Сатурна таких особенностей не наблюдается. Выходит, в этих направлениях астероиды сложнее обнаружить. Логично предположить, что причина во Млечном Пути: среди огромного числа тусклых звёзд крайне сложно обнаружить ещё одну невзрачную движущуюся звёздочку. Млечный Путь пересекает эклиптику в созвездии Стрельца и на границе созвездий Близнецов и Тельца. В Стрельце располагается центр Галактики и там яркость Млечного Пути, а значит и число звёзд, максимальна. С противоположной стороны Млечный Путь, напротив, тускл и меньше препятствует поиску астероидов.

Отчего же мы видим кентавры на фоне центра Галактики? Дело в том, что хоть массовое открытие этого типа астероидов началось незначительно раньше открытия транснептуновых объектов, но кентавры значительно быстрее движутся вокруг Солнца, пройдя с момента открытия значительную часть своей орбиты. Далёкие астероиды за это же время сместились по своей орбите незначительно и не успели занять место в интересующем нас пробеле.

Определим положение планет. В качестве начала отсчёта выберем направление на центр Галактики. Точно его указать сложно, но можно попробовать угадать. Если бы астероиды не двигались, то необходимо было бы выбрать направление на середину пустой части пояса Койпера. Но астероиды постепенно смещаются против часовой стрелки, а значит направление нужное нам направление должно быть ближе к левой границе пустого пространства.

Теперь остаётся измерить углы между направлением на планеты и на центр Галактики и определить созвездие. Нептун находится на 55° восточнее. Будем считать, что одно созвездие занимает 30°. Тогда Нептун надо искать в Водолее. Уран расположен в 90° к востоку, т. е. должен находиться в Рыбах. Сатурн оказался в 55°, но уже к западу. Двигаясь от Стрельца, эклиптика проходит последовательно через созвездия Змееносца, Скорпиона и Весов. Известно, что в Скорпионе Солнце бывает примерно на протяжении недели, так что Змееносца со Скорпионом можно в нашем случае считать одним созвездием. Тогда Сатурн находится в Весах. Юпитер расположен в 175° к Западу, т. е. в противоположной части неба. Здесь находится созвездие Близнецов.

Для ответа на последний вопрос необходимо привязать положение планет в прошлом к какому-то известному их положению. Совсем недавно, 21 декабря 2020 года, произошло довольно заметное явление — соединение Юпитера и Сатурна. Сидерический период Юпитера равен 11.9 года, Сатурна — 29.5 лет. Их синодический период равен $S = \left(11.9^{-1} - 29.5^{-1}\right)^{-1} \approx 20\,\text{лет}$, а значит, в предыдущие 10 лет других их соединений не происходило. Поскольку в момент соединения Юпитер с Сатурном находились на границе созвездий Стрельца и Козерога, то они располагались на небе вблизи Солнца. К тому же выводу можно прийти, вспомнив, что соединение было видно только сразу после заката. Поэтому будем считать, что для наблюдателя на Солнце соединение произошло примерно в эти же даты.



Можно заметить, что на рисунке Юпитер отстаёт от Сатурна на 120°. Поскольку отставание в 360° Юпитер ликвидирует за 20 лет, то в текущих условиях он догонит Сатурн за $\frac{120°}{360°}20 \approx 6.7$. Значит указанная на рисунке картина наблюдалась примерно зимой-весной 2014 года.

Что примечательно, помня, что соединение было на границе Стрельца и Козерога, можно найти положение пробела в поясе Койпера на небе. Промежуток времени 6.7 года составляет 0.23 сидерического периода Сатурна, что соответствует дуге около 82°. Обозначим это направление пунктирной линией. Созвездие Стрельца велико, а центр Галактики находится на его западной границе. Поэтому пробел хорошо попадает на созвездие Стрельца.

Критерии проверки

Вывод о происхождении пробела в поясе Койпера оценивается в **2 балла**. Вычисление даты, на которую составлен рисунок, оценивается в **4 балла**: **2 балла** — вычисление синодического периода Сатурна для Юпитера, **1 балл** — правильное вычисление угла между направлениями на Сатурн и Юпитер и **1 балл** — за правильный ответ. Диапазон принимаемых значений: от осени 2013 до весны 2014.

Правильное определение какого-либо опорного направления (пробел в Стрельце, соединение на границе с Козерогом и т. п.) — **2 балла**. Правильное определение созвездия — **по 1 баллу** для каждой планеты.

Максимальная оценка за задачу — **12 баллов**.

(К. И. Васильев)

Справочные данные

Планета	Большая полуось, а.е.	Эксцент-риситет	Наклон к плоскости эклиптики, °	Период обращения
Меркурий	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут
Венера	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут
Земля	1.0000	0.0167	0.000	365.2564 сут
Марс	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут
Юпитер	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет
Сатурн	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет
Уран	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет
Нептун	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет