ММО-2021, 9 класс (с решениями)

Задача 1. Положительные числа a и b таковы, что $a - b = a/b$. Что больше, $a + b$ или ab? *(В. Клепцын, А. Гусев)*

Ответ: $ab > a + b$.

Решение 1. Рассмотрим искомое сравнение

$$ab \vee a + b\,.$$

Умножим его на равенство $a/b = a - b$ (левую часть на левую, правую на правую). При умножении на положительное число (а a/b положительно) неравенство сохранится. Получаем

$$a^2 \vee a^2 - b^2\,.$$

Отсюда ясно, что левая часть больше правой. □

Решение 2. Рассмотрим искомое сравнение

$$ab \vee a + b\,.$$

Прибавим к нему равенство $a/b = a - b$, сведя к сравнению

$$ab + a/b \vee 2a\,.$$

Перенеся всё в левую часть, можно заметить, что оно равносильно $\frac{a}{b}(b-1)^2 \vee 0$. Чтобы убедиться в том, что левая часть больше, осталось показать $b \neq 1$.

Действительно, предположим, что $b = 1$. Подстановка в исходное равенство даёт $a - 1 = a$, противоречие. □

Решение 3. Домножив равенство $a - b = a/b$ на b, получим $ab - b^2 = a$, откуда $ab = a + b^2$. Тогда достаточно сравнить $a + b^2$ и $a + b$, то есть сравнить b с 1. Предположим, что $b \leqslant 1$. Тогда $a/b \geqslant a > a - b$, противоречие. Значит, $b > 1$, откуда $ab = a + b^2 > a + b$. □

Задача 2. Клетки бумажного квадрата 8×8 раскрашены в два цвета. Докажите, что Арсений может вырезать из него по линиям сетки два квадрата 2×2, не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.) *(Л. Попов, А. Гусев)*

Решение 1. Предположим, что вырезать такие два квадрата Арсению не удастся. Это означает, что любые два квадрата, совпадающие по раскраске, пересекаются хотя бы по одной клетке.

Разобьём наш квадрат на 16 квадратов 2×2, как отмечено на рис. 1a; все они должны быть раскрашены по-разному. Так как всего разных способов раскрасить квадрат 2×2 в два цвета ровно 16, то все раскраски среди них присутствуют по одному разу.

(a) (b)

Рис. 1: к решению задачи 2

Теперь выделим 12 квадратов-«потомков» 2×2, отмеченных на рис. 1b, каждый из которых пересекается с двумя квадратами-«родителями» первого разбиения, состыкованными горизонтально. Заметим, что каждый «потомок» совпадает по раскраске с одним из «родителей» (так как он должен совпасть с одним их квадратов первого разбиения, и он не может совпасть с теми, с которыми он не пересекается).

Но если два квадрата, смещённые друг относительно друга на одну клетку по горизонтали, совпадают по раскраске, то их верхние клетки должны быть одного цвета, и их нижние клетки тоже одного цвета. Это даёт всего четыре варианта раскраски для таких квадратов-«потомков». Но всего их 12, значит, какие-то два их них совпадут по раскраске; при этом они все попарно не пересекаются. Противоречие. □

Решение 2. Как и в предыдущем решении, предположим, что вырезать такие два квадрата Арсению не удалось.

Рассмотрим все 49 квадратов 2×2. Так как всего возможных раскрасок таких квадратов 16, то по принципу Дирихле некоторые четвёрки квадратов совпадают по раскраске.

Во-первых, заметим, что более чем 4 квадрата по раскраске совпасть не могут. Действительно, в этом случае либо их вертикальные координаты, либо горизонтальные принимают хотя бы три различных значения, то есть у двух квадратов одна из координат отличается хотя бы на 2 (для определенности можно рассматривать координаты центров квадратов). Такие квадраты пересекаться не могут.

Аналогичные соображения позволяют заметить, что три или четыре квадрата с одинаковой раскраской обязательно должны иметь общую клетку.

Рассмотрим некоторую тройку квадратов с одинаковой раскраской. Без ограничения общности будем считать, что они расположены так, как на рис. 2. Тогда из совпадения раскрасок следует, что клетки 1, 2, 4 имеют одинаковый цвет; аналогично с тройками клеток $\{2, 3, 5\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 8\}$. Получается, что у всех этих клеток один и тот же цвет.

Ясно, что для четырёх квадратов с одинаковой раскраской вывод будет аналогичен. Это означает, что в тройке или четвёрке квадратов с совпадающей раскраской они все либо

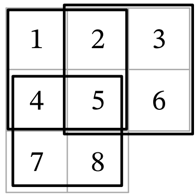
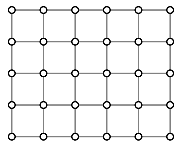


Рис. 2: к решению задачи 2

целиком первого цвета, либо целиком второго. Значит, все остальные 14 способов раскрасить квадрат 2×2 могут быть представлены не более чем 2 экземплярами.

Тогда всего квадратов 2×2 не более $2 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 36$. Но их 49. Противоречие. $\square$

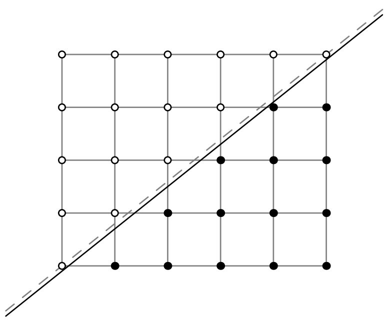
Задача 3. В узлах сетки клетчатого прямоугольника 4×5 расположены 30 лампочек, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек (размерами лампочек следует пренебречь, считая их точками), такую, что с какой-то одной стороны от неё ни одна лампочка не горит, и зажечь все лампочки по эту сторону от прямой. Каждым ходом нужно зажигать хотя бы одну лампочку. Можно ли зажечь все лампочки ровно за четыре хода?

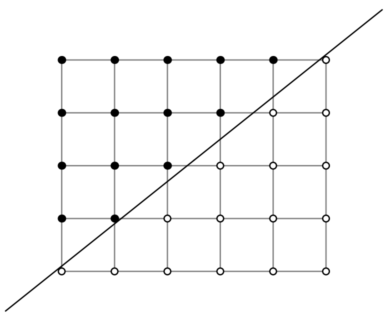


(А. Шаповалов)

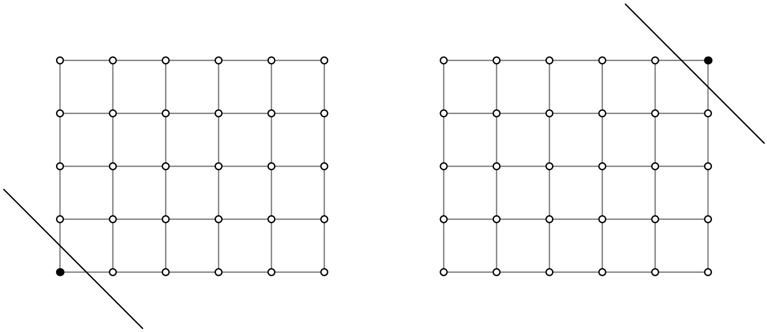
Ответ: да.

Решение. Проведём вспомогательную прямую через две лампочки в противоположных углах прямоугольника. Тогда ни одна другая лампочка на эту прямую не попадет. Теперь проведём первую прямую параллельно вспомогательной, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжём все лампочки ниже этой прямой, как на первом рисунке (зажигаемые лампочки обозначены чёрными точками). Вторую прямую аналогично проведём параллельно вспомогательной, но чуть выше, чтобы две угловые лампочки оказались под ней; зажжём все лампочки выше этой прямой, как на втором рисунке.





Незажжёнными остались две угловые лампочки. Их можно зажёчь за два хода, просто отсекая прямой от остальных.



∎

Задача 4. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника MXY, касается ω. *(А. Доледенок)*

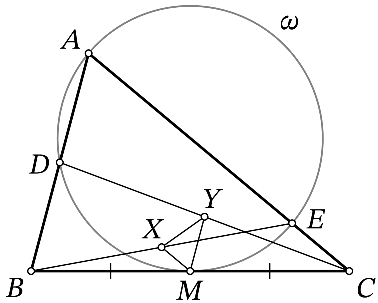


Рис. 3: к решению задачи 4

Решение. Заметим, что MX и MY — средние линии треугольников BCE и BCD (рис. 3), поэтому $\angle XMB = \angle C$ и $\angle CMY = \angle B$. Тогда

$$\angle YMX = 180^\circ - \angle XMB - \angle CMY = \angle A\,.$$

По свойству касательной и секущей к окружности имеем $BM^2 = BD \cdot BA$, откуда

$$MY = \frac{BD}{2} = \frac{BM^2}{2AB}\,.$$

Аналогично получаем $MX = CM^2/(2AC)$. Деля одно на другое и пользуясь $BM = CM$, находим

$$\frac{MY}{MX} = \frac{BM^2}{CM^2} \cdot \frac{2AC}{2AB} = \frac{AC}{AB}\,.$$

Получаем, что треугольники BAC и XMY подобны по углу и отношению прилежащих сторон.

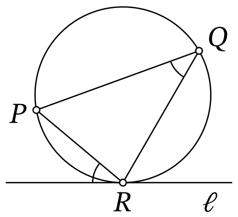


Рис. 4: к решению задачи 4

Лемма (обратная теорема об угле между касательной и хордой). Пусть в треугольнике PQR угол Q равен углу между отрезком PR и прямой ℓ, проходящей через R, как на рис. 4. Тогда прямая ℓ касается описанной окружности треугольника PQR.

Доказательство леммы. Проведём прямую ℓ', касающуюся окружности в точке R. Тогда по теореме об угле между хордой и касательной угол между прямой и отрезком PR тоже равен углу Q треугольника. Отсюда следует, что ℓ и ℓ' совпадают. *Лемма доказана.*

Тогда $\angle XYM = \angle ACB = \angle XMB$. Получается, что в описанной окружности треугольника XMY угол, опирающийся на хорду XM, равен углу между хордой XM и прямой BC. Используя лемму, заключаем, что прямая BC касается окружности, описанной вокруг треугольника XMY. Это и означает, что рассматриваемые окружности касаются. □

Задача 5. В ряд лежат $100N$ бутербродов, каждый с колбасой и сыром. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно *действие* съедает один бутерброд с одного из краёв. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый *ход* делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются до тех пор, пока дядя Фёдор не доест все бутерброды. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?

(И. Митрофанов)

Ответ: нет.

Решение. Докажем, что при $N = 3^{100}$ выиграет кот Матроскин. Для этого необходимо, чтобы на последнем шаге дяди Фёдора все оставшиеся 100 бутербродов оказались без колбасы (иначе он сможет выбрать последовательность действий так, чтобы закончить на бутерброде с колбасой).

Пронумеруем бутерброды по порядку. Стратегию кота Матроскина разделим на несколько стадий. Сначала покажем, что он может действовать так, чтобы к моменту, когда останется треть от исходного количества бутербродов, все бутерброды, номер которых даёт остаток 1 при делении на 100, были без колбасы.

Отметим в каждой сотне бутербродов тот бутерброд, номер которого даёт остаток 1 при делении на 100. Пусть за первые 3^{99} ходов кот Матроскин стянет колбасу с каждого отмеченного бутерброда среди центральной трети бутербродов. Так как Дядя Фёдор за это время съедает $3^{99} \cdot 100$ бутербродов, никакие бутерброды среди центральной трети съедены не будут. Следующие 3^{99} ходов кот Матроскин будет забирать колбасу с произвольного отмеченного бутерброда, а если отмеченных бутербродов с колбасой не останется — ничего не делать. Так как за один ход дядя Фёдор съедает не более одного отмеченного бутерброда (см. замечание 1), то ещё через 3^{99} ходов все оставшиеся отмеченные бутерброды будут без колбасы.

На следующей стадии своей стратегии кот Матроскин аналогичным образом добьётся того, чтобы все бутерброды, номер которых даёт остаток 2 при делении на 100, оказались без колбасы; при этом количество бутербродов снова уменьшится в 3 раза. На каждой следующей стадии он будет освобождать от колбасы очередной остаток от деления на 100; через сто стадий, когда останется ровно 100 бутербродов, они все будут без колбасы. □

Замечание 1. Каждым ходом дядя Фёдор будет съедать бутерброды с номерами, дающими различные остатки от деления на 100, даже если съедает их с двух сторон. Это можно понять, заметив, что до его хода количества бутербродов для каждого остатка одинаковы, так как общее их количество кратно 100; и после его хода ситуация такая же.

Замечание 2. Можно уточнить стратегию кота Матроскина, показав, что при $N = 2^{100}$ он тоже выигрывает; на каждой стадии количество бутербродов при этом будет уменьшаться в два раза. Для этого колбасу ему нужно стягивать только с тех бутербродов (с номерами, дающими данный остаток от деления на 100), до которых дядя Фёдор на данной стадии гарантированно не доберётся. Нетрудно понять, что такой бутерброд действительно всегда будет находиться.

А вот при $N = 2^{100}-1$ уже выигрывает дядя Фёдор. Действительно, первыми $2^{99}-1$ ходами он съест любые $2^{99} - 1$ сотен бутербродов; за это время усилиями соперника появится не более $2^{99} - 1$ бутербродов без колбасы. Далее, если перед дядей Фёдором лежит 2^k сотен бутербродов, из которых не более $(100 - k) \cdot 2^k - 1$ без колбасы, то при $k > 0$ он может съесть ту половину ряда (правую или левую), в которой бутербродов без колбасы больше. Тогда их в ряду останется не более $(100 - k) \cdot 2^{k-1} - 1$ плюс, благодаря коту Матроскину, не более 2^{k-1} новых — всего не более $(100 - k + 1)\dot{2}^{k-1} - 1$. Продолжая так и далее, при $k = 0$ дядя Фёдор получит сто бутербродов, из которых не более 99 будут без колбасы.

Задача 6. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся на d. *(Н. Белухов)*

Решение 1. Предположим, что для какого-то $d < p + q$ такие точки не найдутся.

Лемма. Найдутся такие целые a и b, что $d = ap - bq$.

Доказательство леммы. Рассмотрим числа $ap-d$ при $a = 2, 3, \dots, q+1$. Если хотя бы одно из них делится на q, то есть имеет вид bq, то мы получаем $ap - d = bq$, что и требуется. В ином случае какие-то два их этих чисел дают одинаковый остаток от деления на q (так как их всего ровно q, и остатка 0 там нет). Тогда $(a_1p-d)-(a_2p-d) = qk$, откуда $p(a_1-a_2) = qk$. Тогда, так как p и q взаимно просты, $a_1 - a_2$ кратно q — но в диапазоне от 2 до $q + 1$ все числа отличаются менее чем на q, то есть этот случай невозможен. *Лемма доказана.*

Мы можем увеличить a на q, а b на p — соотношение $d = ap-bq$ при этом не нарушится. Будем делать так до тех пор, пока не добьемся $a, b > 1$.

Пусть лягушка вернулась в 0, сделав n шагов вправо и m шагов влево. Тогда $np = mq$, а значит, $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$. Будем считать, что лягушка пропрыгивает эту последовательность $m+n$ ходов бесконечное число раз по циклу; ясно, что точки она при этом будет посещать те же.

Возьмём $k > \frac{a+b}{m+n}$. Расставим по кругу буквы, описывающие $(m + n)k$ подряд идущих ходов лягушки. Будем выписывать их по часовой стрелке, по одной букве на ход; если это ход вправо, напишем букву «П», а если ход влево — «Л». Всего мы расставили по кругу nk букв «П» и mk букв «Л».

Пусть мы найдём отрезок из $a + b$ подряд идущих букв, среди которых ровно a раз встречается «П» (и ровно b раз — «Л»). Тогда эти буквы соответствуют $a + b$ последовательным ходам, за которые лягушка сдвинулась ровно на $ap-bq = d$. Противоречие. Значит, ни на каком таком отрезке буква «П» не может встречаться a раз.

Рассмотрим какой-то отрезок из $a + b$ подряд идущих букв. Пусть буква «П» встречается на нём не более, чем $a - 1$ раз. Посмотрим на отрезок из $a + b$ букв, отличающийся от предыдущего сдвигом на 1 по часовой стрелке, то есть получившийся выкидыванием одной буквы и добавлением другой. Заметим, что на новом отрезке буква «П» встречается не более, чем $a - 1 + 1 = a$ раз, а так как ровно a быть не может, то тоже не более, чем $a - 1$ раз. Повторив эти рассуждения, получим, что на любом отрезке такой длины буква «П» встречается не более, чем $a-1$ раз. Мы можем рассмотреть среднее количество букв «П» во всех наборах $a + b$ подряд идущих букв и сделать вывод, что доля букв «П» во всём круге не более $\frac{a-1}{a+b}$. Значит, отношение количества букв «П» к количеству букв «Л» во всём круге не превосходит $\frac{a-1}{b+1}$.

Аналогично, если на каком-то отрезке из $a+b$ подряд идущих букв буква «П» встречается не менее, чем $a+1$ раз, то отношение количества букв «П» во всём круге к количеству букв «Л» не менее $\frac{a+1}{b-1}$. Следовательно,

$$\text{либо} \quad \frac{nk}{mk} \leqslant \frac{a-1}{b+1}, \quad \text{либо} \quad \frac{nk}{mk} \geqslant \frac{a+1}{b-1}.$$

При этом $\frac{nk}{mk} = \frac{n}{m} = \frac{q}{p}$. Что прийти к противоречию, нам достаточно показать, что

$$\frac{a-1}{b+1} < \frac{q}{p} < \frac{a+1}{b-1}.$$

Левое неравенство эквивалентно $(a - 1)p < (b + 1)q$, что следует из $ap - bq = d < p + q$.

Правое неравенство аналогично эквивалентно $(a+1)p > (b-1)q$, что следует из $ap-bq = d > -p-q$.

Мы пришли к противоречию, значит, точки на расстоянии d найдутся. $\square$

Решение 3. Как и в предыдущем решении, будем считать, что лягушка прыгает в бесконечном цикле. Также воспользуемся представлением $d = ap - bq$ для положительных a и b, сумму $a + b$ обозначив за r.

За δ_i обозначим разность между положениями лягушки в момент $i + r$ (т. е. через $i + r$ шагов после начала) и в момент i. Так как их разделяет r шагов, то

$$\begin{aligned}\delta_i &= xp - (r-x)q = ap + (x-a)p - bq - (r-x-b)q = \\ &= d + (x-a)p + (x-(r-b))q = d + (x-a)(p+q)\,.\end{aligned}$$

Если δ_i равно d, то мы нашли искомые позиции. Предположим противное, пусть $\delta_i \neq d$ для всех i. Тогда все числа δ_i имеют вид $d + (p+q)k$ для целых $k \neq 0$.

Заметим, что разность между δ_i и δ_{i+1} определяется тем, какими были $(i+1)$-й и $(i+r+1)$-й шаги; разобрав случаи, нетрудно убедиться, что она равна $-(p+q)$, 0 или $p+q$. Это означает, что числа δ_i либо все меньше 0 (имеют вид $d - (p+q)k$ для натурального k), либо все больше 0 (имеют вид $d + (p+q)k$ для натурального k).

Тогда рассмотрим позицию лягушки через rT шагов, где T — количество шагов в её цикле. С одной стороны, она равна сумме $\delta_0 + \delta_r + \delta_{2r} + \ldots + \delta_{r(T-1)}$, которая по доказанному выше должно быть либо отрицательной, либо положительной. С другой стороны, через rT шагов лягушка вернётся на позицию 0. Противоречие. $\square$