

## 6 класс в Математической вертикали

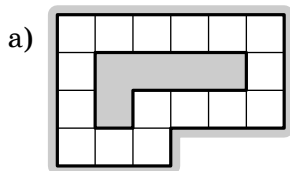
**Задача 1.** Электронные часы показывают время: часы, минуты и секунды, например 18:00:00. Однажды на часах две цифры погасли, и остались только цифры 2, 0, 2, 2 (именно в таком порядке). Назовите самый поздний момент в сутках, когда это могло произойти. [3 балла]

(Д. А. Калинин)

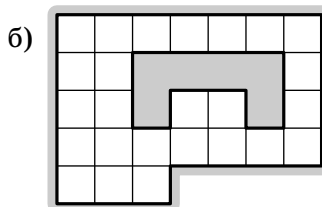
**Ответ.** 23:50:22.

**Решение.** Самое позднее время, которое могут показывать электронные часы, 23:59:59. Если посмотреть на время как на шестизначное число, то два момента времени сравниваются так же, как и обычные числа: время тем больше, чем больше первая цифра; если первые цифры совпадают, сравнивают вторую и т. д. Поэтому постараемся сохранить от 23:59:59 как можно больше цифр в начале. Максимум можно оставить три первых цифры, так как иначе останется больше двух цифр, отличных от 2 и 0. Пробуем найти время, начинающееся на 23:5\*:\*\*. Цифры 3 и 5 должны обязательно погаснуть, значит, оставшиеся должны быть 2, 0, 2, 2 именно в таком порядке, т. е. часы должны показывать: 23:50:22.

**Задача 2.** Дана бумажная клетчатая фигура с дыркой (см. рисунок). Покажите, как разрезать эту фигуру на две части таким образом, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Части можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.



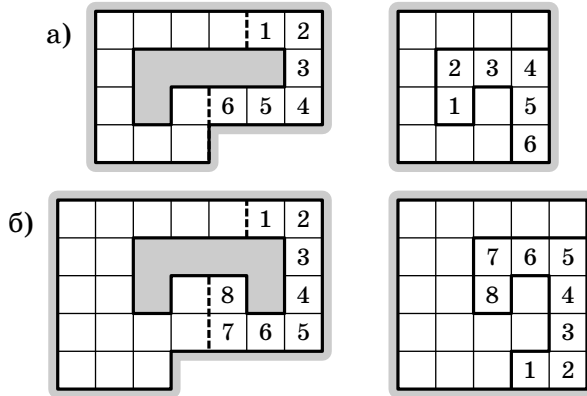
[2 балла]



[2 балла]

(М. А. Евдокимов)

**Ответ.** На рисунках ниже для каждого из пунктов приведено необходимое разрезание.



**Задача 3.** Найдите шестизначное число, у которого первая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё и вторая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё.

[4 балла] (А. В. Шаповалов)

**Ответ.** 769999.

**Первое решение.** Сумма пяти последних цифр числа по условию делится нацело на 6 (частное равно первой цифре). Сумма четырех последних цифр числа также делится нацело на 6 (частное равно второй цифре). Поэтому вторая цифра, как разность двух чисел, делящихся на 6, также делится на 6. Значит, вторая цифра 0 или 6. Если она равна 0, то и сумма последних четырех цифр также равна 0, а значит, и первая цифра равна 0, но шестизначное число с нуля начинаться не может. То есть этот вариант не подходит, и вторая цифра равняется 6. Тогда сумма последних четырех цифр равняется  $6 \cdot 6 = 36$ , а значит, все они равны 9. Наконец сумма последних пяти цифр равняется 42, и следовательно, первая цифра равняется  $42 : 6 = 7$ . Тем самым искомым число — это 769999.

**Второе решение.** Сумма последних 4 цифр в 6 раз больше, чем вторая цифра, значит, сумма последних 5 цифр равна 7 вторым и равна 6 первым цифрам. Следовательно, 7 вторых цифр равны 6 первым, а значит, первая цифра

равна 7, а вторая равна 6; тогда сумма последних четырёх равна 36, а это достижимо, только если все 4 последние цифры — девятки.

*Комментарий.* Можно решить задачу, перебрав все возможные варианты (от 0 до 9) значения второй цифры числа. Например, если эта цифра равна 9, то сумма цифр правее неё в 6 раз больше, т. е.  $9 \cdot 6 = 54$ , но тогда сумма всех цифр правее первой равна  $9 + 54 = 63$ . Так как число 63 не делится на 6, вариант, что вторая цифра 9, не подходит, и т. д.

**Задача 4.** Три лягушки сидели на одной прямой. Вначале прыгнула одна из них, потом другая, а затем и третья. Каждая лягушка приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Оказалось, что длины двух из этих трёх прыжков равны 60 см.

а) Какой могла быть длина оставшегося прыжка?

[2 балла]

б) Каким могло быть расстояние между двумя крайними лягушками изначально?

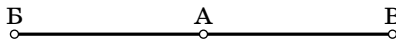
[4 балла]

(А. В. Шаповалов)

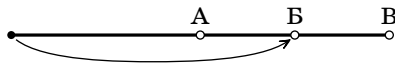
Сравните с задачей 2 для 6 класса (с. 3).

**Ответ.** а) 30 см или 120 см; б) 100 см или 160 см.

**Решение.** Независимо от первоначального взаимного расположения лягушек, после первого прыжка первая лягушка (А) приземлится точно в середину отрезка между двумя другими.



Дальше прыгнет одна из лягушек, сидящих в конце этого отрезка (пусть лягушка Б). Она пролетит половину его длины и ещё четверть, т.е. всего  $3/4$  его длины. Теперь лягушки будут сидеть так:

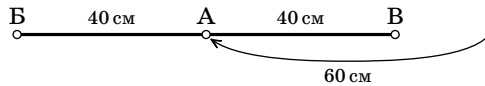


Заметим, что расстояние между крайними лягушками равнялось длине БВ, а теперь вдвое меньше (АВ — половина от исходного отрезка БВ).

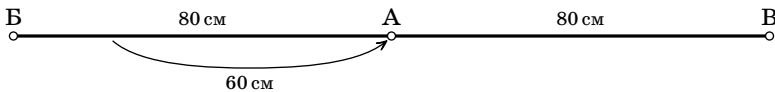
Третий прыжок будет обладать тем же свойством: его длина составит  $\frac{3}{4}$  от длины текущего отрезка (AB), а расстояние между крайними лягушками вновь сократится вдвое.

Из сказанного следует, что длина третьего прыжка заведомо меньше длины второго. Поэтому совпасть могут либо длины первого и второго прыжков, либо первого и третьего. Разберём оба случая.

1) Длины первого и второго прыжков равны 60 см. Следовательно, расстояние между крайними лягушками перед вторым прыжком было равно  $60 : 3 \cdot 4 = 80$  см, а после этого прыжка станет  $80 : 2 = 40$  см. Тогда длина третьего прыжка будет  $\frac{3}{4}$  от 40 см, т. е. 30 см, а исходное расстояние между крайними лягушками будет равно  $60 + 40 = 100$  см (лягушка А первоначально находилась на расстоянии 60 см от середины отрезка длиной 80 см).



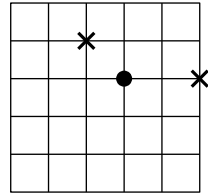
2) Длины первого и третьего прыжков равны 60 см. Следовательно, расстояние между двумя крайними лягушками перед третьим прыжком было  $60 : 3 \cdot 4 = 80$  см. Значит, перед вторым прыжком расстояние между крайними лягушками было в два раза больше — 160 см. А так как первая лягушка прыгнула всего на 60 см, то она находилась где-то внутри этого отрезка.



Поэтому исходное расстояние между крайними лягушками (перед первым прыжком) тоже было равно 160 см.

Итак, оба рассмотренных случая возможны. В первом исходное расстояние между крайними лягушками 100 см, а длины прыжков равны 60 см, 60 см, 30 см. Во втором исходное расстояние между крайними лягушками равно 160 см, а длины прыжков равны 60 см, 120 см, 60 см.

**Задача 5.** Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат  $5 \times 5$  метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.



а) Отметьте ещё один перекрёсток, где могла бы задумчиво сидеть мышка (расстояние по дорожкам до обоих кусочков сыра одинаковое). [1 балл]

б) Найдите все 6 перекрёстков, где могла бы сидеть такая мышка (включая найденные ранее). [2 балла]

в) Придумайте, на какие два перекрёстка можно положить куски сыра так, чтобы подходящих мест для задумчивой мышки оказалось как можно больше.

[до 5 баллов] (Т. В. Казыцына)

**Решение.** См. задачу 4 для 6 класса (с. 4).

**Задача 6.** Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами А, В, С, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить « $A + B = ?$ », то в случае, когда  $A = 9$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ , ответом будет « $A + B = BC$ ». Как можно за несколько таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют? Постарайтесь обойтись как можно меньшим числом вопросов (жюри умеет за 5 вопросов). [до 8 баллов] (А. А. Заславский)

**Решение.** См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

*Комментарий.* Если не ограничивать себя в количестве вопросов, то выяснить, какой буквой какая цифра закодирована, можно и без вопроса про общую сумму цифр. Например, можно всё время спрашивать только про пары цифр. Так, перебирая по очереди суммы разных пар цифр, в какой-то момент мы получим в ответе двузначное число. Такое число может начинаться только на 1 (сумма двух однозначных чисел меньше 20).

Таким образом, в этот момент мы определим, какая буква кодирует цифру 1. Далее, складывая найденную 1 с каждой из оставшихся букв, мы выясним какая из них кодирует цифру 9 (та, что в сумме с 1 даст двузначное число), а значит, выясним и 8 (та цифра, что в сумме с 1 даст 9). Определив 8, выясним 7 (та цифра, что в сумме с 1 даст 8) и так далее. В итоге определим все цифры.