

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**10 КЛАСС
Вариант 1**

Задание 1

Средняя мощность, необходимая владельцу частного дома в Подмоскowie для комфортного проживания, составляет 0,7 кВт. Владелец дома хочет летом полностью обеспечить энергопотребление за счёт солнечных панелей с КПД, равным 0,2. Сумма солнечной радиации на единицу площади за лето в этом регионе составляет $112 \text{ кВт} \cdot \text{ч}/\text{м}^2$. Какова общая площадь требуемых для этого батарей? Сохранение и передача энергии происходит без потерь.

Решение. Общие затраты энергии можно определить через требуемую мощность. Полученная от солнечных батарей энергия определяется как ηSw , где η – КПД, S – общая площадь батарей, w – сумма солнечной радиации. Тогда

$$S = \frac{Pt}{\eta w} = 69 \text{ м}^2.$$

Ответ: 69 м^2 .

Задание 2

Многие альпинисты знакомы с горной болезнью. На больших высотах в горах из-за низкого давления в организме падает насыщение (сатурация) крови кислородом SpO_2 , измеряемая в процентах. Минимальным нормальным значением SpO_2 можно считать 95%.

Два математика отправились в восхождение, на очередной стоянке измерили свою сатурацию и обозначили превышение минимального значения через x и y . Оказалось, что разность кубов этих величин равна 26, а

$$x^2y - xy^2 = 6.$$

Чему равны сатурации двух математиков?

Решение. Получим ответ, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x^2y - xy^2 = 6 \end{cases}$$

Решением этой системы являются пары $(3, 1)$, и $(-1, -3)$, вторая из которых не удовлетворяет условию. Таким образом,

$$\text{SpO}_1 = 3 + 95 = 98, \quad \text{SpO}_2 = 1 + 95 = 96.$$

Ответ: 98 % и 96 %.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

Задание 3

В математической статистике есть понятие ошибок первого и второго рода. В случае ошибки первого рода была отвергнута верная гипотеза, в случае ошибки второго рода – принята неверная. В случае медицинских тестов такой результат называется ложноположительным и ложноотрицательным соответственно.

Одно из исследований показало, что в случае ПЦР-теста на коронавирус вероятность получения ложноположительного результата (т. е. тест показал заболевание, когда в действительности его нет) составляет 0,5 %.

1) В городе N за последнюю неделю были протестированы 14 тысяч человек и получено 1065 положительных тестов. Сколько из этих людей действительно заболели, если вероятность ложноотрицательного результата равна нулю?

Замечание. В рамках этой задачи мы считаем, что случайная величина (количество заболевших) равна её математическому ожиданию. Строго говоря, это неверно.

2) Один из жителей сдал положительный тест. С какой вероятностью он болен с учётом определённой в пункте 1 статистики по заболеваемости?

Решение. Все, кто получили отрицательный тест, здоровы, так как ложноотрицательного результата не бывает. Вероятность того, что здоровый человек получит положительный результат, равна 0,005.

Пусть x человек действительно больны. У всех них тесты будут положительны (вероятность ложноотрицательного теста нулевая). $(14\ 000 - x)$ человек здоровы и с вероятностью 0,005 каждый из них получает ложноположительный тест. *Математическое ожидание количества ложноположительных тестов* равно $(14\ 000 - x) \cdot 0,005$. Приравниваем общее число положительных результатов к числу истинно больных людей в сумме с математическим ожиданием ложноположительных тестов $1065 = x + (14\ 000 - x) \cdot 0,005$. Решая уравнение, получаем $x = 1000$.

Ответ на второй вопрос можем искать строго или нестрого.

Строгое решение использует формулу условной вероятности.

Пусть A – событие, которое состоит в том, что человек болен. B – событие, которое состоит в том, что тест положителен, $p(A|B)$ – вероятность того, что человек болен, при условии положительного теста. Тогда

$$p(A|B) = p(AB) / p(B).$$

**МОСКОВСКАЯ ПРЕПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

Можно считать, что $p(B) = 1065 / 14\ 000$,

$p(AB) = 1000 / 14\ 000$,

$p(A|B) = (1000 / 14\ 000) : (1065 / 14\ 000) = 0,0939 = 93,9\%$.

Нестрогое решение. Среди 1065 людей с положительным тестом 1000 больны, а 65 здоровы.

Вероятность быть больным $1000 / 1065 = 0,0939 = 93,9\%$.

Ответ: 1) 1000, 2) 93,9%.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**10 КЛАСС
Вариант 2**

Задание 1

Средняя мощность, необходимая владельцу частного дома в Подмоскowie для комфортного проживания, составляет 0,8 кВт. Владелец дома хочет летом полностью обеспечить энергопотребление за счёт солнечных панелей с КПД, равным 0,2. Сумма солнечной радиации на единицу площади за лето в этом регионе составляет 144 кВт · ч/м². Какова общая площадь требуемых для этого батарей? Сохранение и передача энергии происходит без потерь.

Решение. Общие затраты энергии можно определить через требуемую мощность. Полученная от солнечных батарей энергия определяется как ηSw , где η – КПД, S – общая площадь батарей, w – сумма солнечной радиации. Тогда

$$S = \frac{Pt}{\eta w} = 61,4 \text{ м}^2.$$

Ответ: 61,4 м².

Задание 2

Многие альпинисты знакомы с горной болезнью. На больших высотах в горах из-за низкого давления в организме падает насыщение (сатурация) крови кислородом SpO₂, измеряемая в процентах. Минимальным нормальным значением SpO₂ можно считать 95 %.

Два математика отправились в восхождение, на очередной стоянке измерили свою сатурацию и обозначили превышение минимального значения через x и y . Оказалось, что разность кубов этих величин равна 7, а

$$x^2y - xy^2 = 2.$$

Чему равны сатурации двух математиков?

Решение. Получим ответ, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$$

Решениями этой системы являются пары (2, 1), и (–1, –2), вторая из которых не удовлетворяет условию. Таким образом,

$$SpO_1 = 2 + 95 = 97, SpO_2 = 1 + 95 = 96.$$

Ответ: 97 % и 96 %.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

Задание 3

В математической статистике есть понятие ошибок первого и второго рода. В случае ошибки первого рода была отвергнута верная гипотеза, в случае ошибки второго рода – принята неверная. В случае медицинских тестов такой результат называется ложноположительным и ложноотрицательным соответственно.

Одно из исследований показало, что в случае ПЦР-теста на коронавирус вероятность получения ложноположительного результата (т. е. тест показал заболевание, когда в действительности его нет) составляет 1 %.

1) В городе N за последнюю неделю были протестированы 14 тысяч человек и получено 1130 положительных тестов. Сколько из этих людей действительно заболели, если вероятность ложноотрицательного результата равна нулю?

2) Один из жителей сдал положительный тест. С какой вероятностью он болен с учётом определённой в пункте 1 статистики по заболеваемости?

Решение. Все, кто получили отрицательный тест – здоровы, так как ложноотрицательного результата не бывает. Вероятность того, что здоровый человек получит положительный результат равна 0,01.

Пусть x человек действительно больны. У всех них тесты будут положительны (вероятность ложноотрицательного теста нулевая). $(14\ 000 - x)$ человек здоровы, и с вероятностью 0,01 каждый из них получает ложноположительный тест. *Математическое ожидание количества ложноположительных тестов* равно $(14\ 000 - x) \cdot 0,01$. Приравниваем общее число положительных результатов к числу истинно больных людей в сумме с математическим ожиданием ложноположительных тестов $1130 = x + (14\ 000 - x) \cdot 0,01$. Решая уравнение, получаем $x = 1000$.

Ответ на второй вопрос можем искать строго или нестрого.

Строгое решение использует формулу условной вероятности.

Пусть A – событие, которое состоит в том, что человек болен. B – событие, которое состоит в том, что тест положителен, $p(A|B)$ – вероятность того, что человек болен, при условии положительного теста.

$$p(A|B) = p(AB) / p(B)$$

Можно считать, что $p(B) = 1130 / 14\ 000$.

$$p(AB) = 1000 / 14\ 000.$$

$$p(A|B) = (1000 / 14\ 000) : (1130 / 14\ 000) = 0,0885 = 88,5 \%$$

Нестрогое решение. Среди 1130 людей с положительным тестом 1000 больны, а 130 здоровы.

Вероятность быть больным $1000 / 1130 = 0,0885 = 88,5 \%$.

Ответ: 1) 1000, 2) 88,5 %.