

Задача 2. Вася в течение 10 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач. Какая погода была на десятый день?

[5 баллов]
(Б. Френкин)

Ответ. Пасмурная.

Решение. Рассмотрим любые два дня, идущие подряд. Каждый день решено хотя бы по одной задаче, но ровно по одной оба дня быть не может, значит, за эти два дня решено минимум три задачи. Таким образом, за первые 8 дней Вася решил как минимум $4 \cdot 3 = 12$ задач. Если бы он за девятый день решил хотя бы две задачи, число решённых за 9 дней задач превысило бы 13. Так что за 9-й день была решена ровно одна задача. На 10-й день погода была пасмурной (и Вася решил две задачи), в противном случае он бы решил в этот день 0 задач, а по условию это не так.

Можно привести пример, как такое могло быть: Вася за эти 10 дней последовательно решал 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 задачи. Нетрудно доказать, что этот пример единственен. В самом деле, доказательство, что Вася решил за 9-й день ровно одну задачу, применимо к любому нечётному дню.

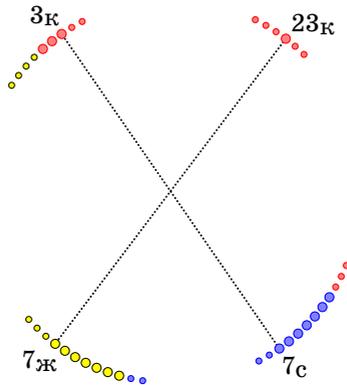
Комментарий. Казалось бы, ответ на вопрос можно было бы дать, вообще не учитывая ни сколько было дней, ни сколько всего решено задач. Действительно, пасмурная погода в последний день ничему противоречить не может, а солнечная может, причём ровно в том случае, когда в предпоследний день решена ровно одна задача. А раз нас просят определить погоду в последний день, то ответ «пасмурная». Тем не менее, такое рассуждение не может считаться решением, так как исходит из неявного предположения, что на задачу можно дать однозначный ответ.

Задача 3. Сто сидений карусели расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в жёлтый, синий или красный цвет. Сиденья одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Синее сиденье № 7 противоположно красному

№ 3, а жёлтое № 7 — красному № 23. Найдите, сколько на карусели жёлтых сидений, сколько синих и сколько красных. [6 баллов] (А. Шаповалов)

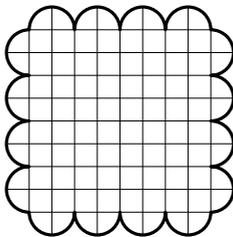
Ответ. Жёлтых 34, синих 20, красных 46.

Решение. Между 3-м и 23-м красными расположено 19 сидений, значит, между 7-м синим и 7-м жёлтым их столько же. Это первые шесть жёлтых сидений и, стало быть, $19 - 6 = 13$ синих с номерами, бóльшими 7. Отсюда находим, что синих сидений $7 + 13 = 20$.



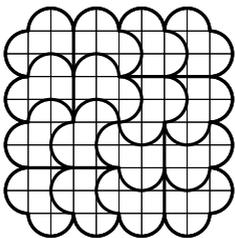
Проходя полкруга по часовой стрелке от 3-го красного к 7-му синему сиденью, мы минуем (не считая этих двух) $(100 - 2) : 2 = 49$ сидений. Шесть из них синие, а остальные $49 - 6 = 43$ — красные. Поэтому всего красных сидений $3 + 43 = 46$. Количество жёлтых сидений $100 - 20 - 46 = 34$.

Задача 4. Разрежьте «печенье» на 16 равных частей (т. е. одинаковых по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.



[6 баллов]
(Т. Голеннищева-
Кутузова)

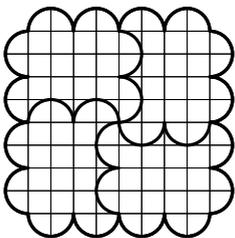
Решение.



Комментарий. Как можно придумать разрезание? В «печенье» 64 клеточки и 16 полукругов по краям. Значит, в каждой части скорее всего будет полукруг и 4 клеточки, но тогда откуда внутри фигуры (не на границе) появятся полукруги? Вероятно, придётся делать полукруглые разрезы — но тогда у фигурок будут не только выпуклые полукруги, но и вогнутости в виде полукруга. Из соображений площади получается одна вогнутость и две выпуклости. Таких фигурок бывает две разных, одна из них подходит:



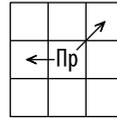
Можно неформально рассуждать и так. Фигура имеет центр и две оси симметрии и поэтому искомое разрезание можно попытаться получить, ведя из центра к краю печенья четыре одинаковые линии разреза (каждый разрез получается из предыдущего поворотом на 90°). Прямыми эти линии быть не должны, попробуем дуги окружности и получим вот такой рисунок:



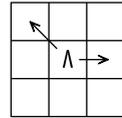
Каждую из получившихся одинаковых четвертушек печенья уже не очень сложно разрезать на четыре фигурки, описанные выше.

Задача 5. Фигура «скрипач» бьёт клетку слева по стороне (локтем) и справа сверху по диагонали (смычком), если он правша, и, наоборот, правую клетку по стороне

и левую верхнюю по диагонали, если левша (все скрипачи сидят лицом к нам). Посадите как можно больше «скрипачей» в «оркестр» 8×8 клеток, чтобы они не били друг друга. (Вы можете использовать любое количество как правой, так и левой.)



так бьёт
правша



а так
левша

[до 7 баллов]

(М. Хачатурян)

Решение. Разместить 32 скрипача несложно: например, можно заполнить четыре столбца через один (неважно, правшами или левшами). Однако можно разместить и больше. Возможный пример с 34 скрипачами приведён на рисунке.

Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		Пр
Л		Пр	Л		Пр		Л

Комментарий. Можно доказать, что более 34 скрипачей разместить не удастся. В самом деле, рассмотрим вертикальную полосу шириной в две клетки. Всякий скрипач, стоящий в этой полосе и при этом не в верхней строке, бьёт одну какую-то клетку в этой же полосе. Мы можем поставить эту пустую клетку в соответствие данному скрипачу. Если при этом оказалось, что два скрипача бьют одну и ту же пустую клетку (возможны два аналогичных друг другу варианта этого, один из них показан на рисунке), то клетка, расположенная под дважды побитой, тоже обязана быть пустой, поэтому её можно поставить в соответствие одному из двух скрипачей, допустим, нижнему. Если же эту клетку бьёт смычком скрипач, стоящий ещё ниже, поставим ему в соответствие соседнюю с ним по горизонтали клетку (она заведомо пустая), и так далее.



Итак, в полосе может быть максимум 9 скрипачей — двое в верхних клетках и ещё семеро в оставшихся 14 клетках, потому что каждому скрипачу там соответствует пустая клетка, то есть занятых клеток не более половины.

Однако две полосы с девятью скрипачами не могут соседствовать, иначе в верхней строке четыре скрипача сидели бы подряд. Поэтому таких полос не более двух, в оставшихся двух полосах максимум по 8 скрипачей, так что всего в оркестре не более чем $9 + 9 + 8 + 8 = 34$ музыканта.

Задача 6. Кащей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись?

[8 баллов]

(Т. Голенищева-Кутузова, Т. Казицына)

Решение. Поскольку разных фигурок разное количество, какая-то фигурка использована больше остальных. Назовём её *главной*. Если фигурок любой другой формы хотя бы на две меньше, то каждый пленник видит, какая фигурка главная. Если все нарисуют её, среди них будут и угадавшие верно.

Пусть это не так и, например, главная фигурка — квадрат, следующая по числу — круг, причём кругов ровно на один меньше, чем квадратов. Тогда пленники с квадратами на лбу будут видеть одинаковое количество кругов и квадратов и не смогут определить наверняка главную фигурку (остальные, как и раньше, будут видеть, какая

фигурка главная, и могут нарисовать её). Для этого случая есть несколько спасительных алгоритмов.

Первый — из двух кандидатов в главные фигурки назвать ближайшую по часовой стрелке. Докажем, что хоть кто-то угадает. Будем учитывать только квадраты и круги, игнорируя остальных пленников. Может ли после каждого квадрата по часовой стрелке следовать круг? Нет, так как квадратов больше. Тот пленник с квадратом, после которого по часовой стрелке следует квадрат, угадает и всех спасёт.

Работает и противоположный алгоритм: из двух кандидатов в главные фигурки называть не ту, которая ближе всего по часовой стрелке. Для доказательства тоже рассмотрим лишь круги и квадраты. Как минимум в одном месте после пленника с квадратом следует по часовой стрелке пленник с кругом. Этот пленник с квадратом верно нарисует свою фигурку.