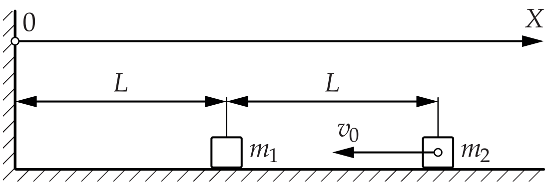
84-я Московская олимпиада школьников по физике
2023 год
10 класс

Условия задач, авторские решения и критерии оценивания

1. Казалось бы, при чём здесь π? (12 баллов)
Бычков А. И.

На гладком горизонтальном столе покоятся два маленьких бруска, массы которых равны $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 10^N$ кг, где N — некоторая константа. В момент времени $t = 0$ второму бруску сообщают скорость v_0 (см. рисунок). Столкновения брусков друг с другом и со стенкой в процессе дальнейшего движения считаются абсолютно упругими.



Пусть ось OX направлена вправо, координата стенки равна нулю. Проследим за движением брусков, рассмотрев зависимость $x_2(x_1)$ — координаты второго бруска в некоторый момент времени от координаты первого в тот же момент. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2, соответствует точка M с координатами (x_1, x_2). Со временем координаты брусков изменяются, а точка M движется по плоскости X_1OX_2.

1a. (*2 балла*) Найдите скорость точки M в момент, когда проекции скоростей брусков на ось OX равны v_1 и v_2 соответственно. Какой угол составляет вектор скорости точки M с осью OX_1? Нарисуйте траекторию движения точки M по плоскости X_1OX_2 для значений масс $m_1 = m_2 = 1$ кг ($N = 0$).

Введём в рассмотрение координаты $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, связанные с координатами (x_1, x_2) формулами $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}x_1$ и $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}x_2$. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2, соответствует точка $\tilde{M}$ с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ на плоскости $\tilde{X}_1O\tilde{X}_2$.

1b. (*4 балла*) Воспользовавшись законом сохранения энергии, покажите, что величина скорости точки $\tilde{M}$ сохраняется при абсолютно упругом ударе брусков.

Пусть за мгновение перед столкновением брусков острый угол между прямой, задаваемой уравнением $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$, и скоростью точки $\tilde{M}$ равен α. Используя законы сохранения импульса и энергии, докажите, что после столкновения брусков острый угол между прямой $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$ и скоростью точки $\tilde{M}$ также равен α.

1c. (*3 балла*) На каком расстоянии от стенки произойдёт пятое столкновение брусков, если параметр N равен 2?

1d. (*3 балла*) Сколько раз столкнётся брусок массой m_1 с бруском массой m_2 и стенкой при $N = 4$?

Указание. Может оказаться полезной приближённая формула $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$, справедливая при малых x ($x \ll 1$). **Ответ**: **1a**. $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_2}{v_1}$. **1c**. $0{,}13L$. **1d**. 314.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения. Промежуточные результаты оцениваются по следующей схеме.

В пункте 1a найдена величина скорости точки M — 1 балл; верно найден угол, который составляет скорость точки M с осью X_1OX_2 — 0,5 балла; правильный рисунок траектории точки M — 0,5 балла.

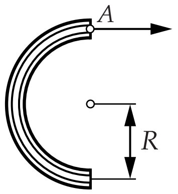
Если в пункте 1b доказано, что величина скорости точки $\tilde{M}$ сохраняется при абсолютно упругом ударе брусков, то выставляется 1 балл. Если доказано, что после столкновения брусков острый угол между прямой $\tilde{x}_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\tilde{x}_1$ и скоростью точки $\tilde{M}$ равен углу до столкновения, то — 3 балла.

В пунктах 1c и 1d верные ответы даже при отсутствии подробных объяснений оцениваются полным баллом.

Если верный ответ в пункте 1c или в пункте 1d не был получен только вследствие вычислительных ошибок, то за этот пункт выставляется 2,5 балла. Если высказывается в той или иной форме мысль о том, что движение точки $\tilde{M}$ в области между прямыми $\tilde{x}_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_1 = 0$ подобно распространению светового луча между двумя зеркалами, то выставляется 1,5 балла. Указано, что острый угол между траекторией точки $\tilde{M}$ и прямой $\tilde{x}_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\tilde{x}_1$ при n-м ударе брусков равен $\alpha_n = (2n-1)\alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)$, или применяется метод развёртки — 3 балла.

2. Тянут канат (6 баллов)
Бычков А. И.

Внутри закреплённой горизонтальной тонкой трубки, изогнутой в форме полуокружности радиуса R, расположен однородный гибкий канат длиной πR, масса которого равна m. Канат начинают тянуть за свободный конец A, прикладывая силу по касательной, как показано на рисунке. Чему равна и куда направлена суммарная сила реакции трубки, действующая на канат, если ускорение точки A каната равно a? Считайте внутренние стенки трубки гладкими, а канат нерастяжимым. Рассмотрите начальный момент времени, когда скорость каната равна нулю. Силой тяжести можно пренебречь.



__Ответ__: $R = ma\sqrt{\frac{4+\pi^2}{\pi^2}}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

Верно найденное значение модуля силы реакции оценивается в 5 баллов, верно найденное направление силы (угол с известным направлением) оценивается в 1 балл.

Если верные ответы не были получены только вследствие вычислительных ошибок, при этом с физической точки зрения всё сделано совершенно правильно, то такое решение оценивается в 4,5 балла.

При отсутствии верных ответов отдельные продвижения в решении оцениваются по следующей схеме.

Указывается, что абсолютное значение силы, действующей на конец каната в точке A, равно ma — 1 балл.

Предлагается в той или иной форме применить теорему о движении центра масс к решению задачи — 1 балл.

Делается попытка рассчитать равнодействующую приложенных к канату сил при помощи деления каната на небольшие элементы — 1 балл.

Верно определяется проекция ускорения центра масс каната на ось, направленную вдоль линии, соединяющей концы каната — 1 балл.

3. Баллон на платформе (9 баллов)
Фольклор

Тележка установлена на горизонтальных прямолинейных рельсах и может двигаться по ним без сопротивления. На тележке закреплён сосуд цилиндрической формы, ось которого параллельна рельсам. Длина цилиндра и его радиус равны L и r соответственно. Масса тележки с пустым сосудом равна M. Сосуд заполняют идеальным газом массой m при температуре T_0. Одно основание сосуда поддерживают при температуре T_0. Температура другого основания в начальный момент также равна T_0, но затем её медленно увеличивают до величины $T_0 + \Delta T$ (при этом известно, что $\Delta T \ll T_0$). Боковая поверхность сосуда теплоизолирована.

Введём ось OX, направив её вдоль оси цилиндра от основания с температурой $T_0 + \Delta T$ к основанию с температурой T_0. Пусть начало координат совпадает с основанием цилиндра с температурой $T_0 + \Delta T$. Задачу решайте приближённо, пренебрегая всеми слагаемыми, пропорциональными квадрату малого параметра $\delta T = \frac{\Delta T}{T}$ и его старшим степеням. Можно использовать приближённую формулу $(1+x)^n \approx 1+nx$, справедливую при малых x ($|x| \ll 1$).

3a. (*4 балла*) Определите зависимость плотности газа в цилиндре от координаты $\rho(x)$.

3b. (*5 баллов*) Найдите смещение тележки d относительно начального положения.

__Ответ__: **3a**. $\rho(x) = \frac{m}{\pi r^2 L}\left(1 + \frac{2x-L}{2L} \cdot \delta T\right)$. **3b**. $d = \frac{m}{M+m} \cdot \frac{L}{12} \cdot \delta T$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

Если верные ответы не были получены только вследствие вычислительных ошибок (в том числе если участник не смог проинтегрировать выражение $x\rho(x)$ для нахождения центра масс), при этом с физической точки зрения всё сделано совершенно правильно, то решения такого рода дают 3 балла за первый пункт и 4 балла за второй.

При отсутствии верных ответов отдельные продвижения в решении оцениваются по следующей схеме.

Указывается, что распределение температуры по координате линейное — 1,5 балла.

Предлагается применить уравнение состояния для расчёта плотности по известной зависимости температуры от координаты — 0,5 балла.

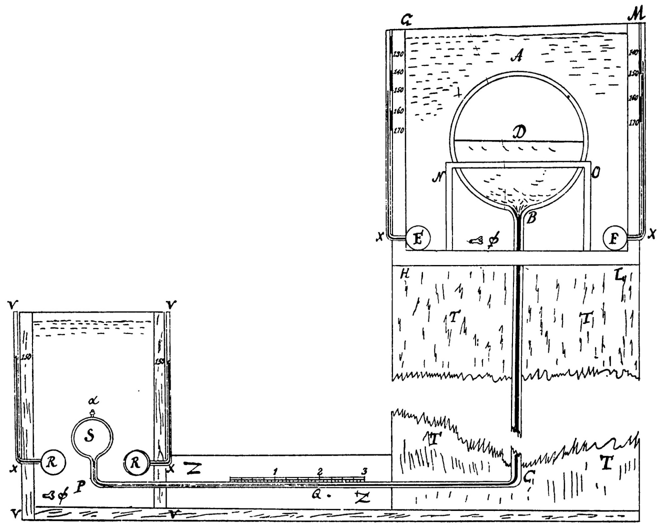
Показывается, тем или иным образом, что зависимость плотности от координаты линейная — 1 балл.

Делается утверждение о том, что центр масс системы должен находиться в покое — 1 балл. Получено уравнение, связывающее координату центра масс газа в баллоне и координату тележки — 1 балл. Указывается, что для определения центра масс газа в баллоне необходимо вычислить интеграл (как в решении) или аналогичную сумму — 1 балл.

4. Барометр Ломоносова (8 баллов)

Крюков П. А.

Для измерения небольших изменений ускорения свободного падения δg (обусловленных, например, изменением высоты над уровнем моря или притяжением Луны) Михаил Васильевич Ломоносов предложил создать прибор (*универсальный барометр*), конструкцию которого описал так: «Возьмём стеклянный шар AB с толстыми стенками и внутренним диаметром в три дюйма; соединим с ним барометрическую трубку BC такой длины, чтобы от центра шара до изгиба C было 28 дюймов; после загиба пусть идёт горизонтальная трубочка CP длиною в фут или больше со стеклянным шаром S диаметром в дюйм; просвет в трубочке CP пусть будет диаметром в $\frac{1}{4}$ линии». Схема, сопровождавшая описание, приводится ниже (увеличенный рисунок см. на листе 3).



Предполагалось, что в прибор заливается ртуть так, чтобы при вертикальном положении трубки BC бо́льший шар был заполнен наполовину (при этом над ртутью не оставалось воздуха), а трубка PC была заполнена до точки Q (середина PC). После этого малый шар герметизировался, оба шара размещались в специальных ящиках, заполненных тающим льдом. Ожидалось, что изменение ускорения свободного падения можно будет обнаружить по изменению положения границы столба ртути в горизонтальной трубке, которое фиксировалось линейкой, расположенной рядом с трубкой. Прибор не был изготовлен, вероятно заявка Ломоносова была отклонена.

4a. (*4 балла*) Пусть расстояние между соседними делениями шкалы линейки составляет 1 линию. Какое минимальное относительное изменение $\frac{\delta g}{g}$ ускорения свободного падения можно было бы обнаружить при помощи универсального барометра?

1 фут = 12 дюймов, 1 дюйм = 10 линий, 1 дюйм = 2,54 см. Плотность ртути и давление её насыщенных паров при 0 °C равны 13,6 г/см^3 и 0,25 кПа соответственно.

4b. (*4 балла*) На какой минимальной высоте над уровнем моря можно было бы измерить изменение ускорения свободного падения при помощи описанного прибора с относительной погрешностью не больше, чем 20 %? Считайте, что погрешность определяется только погрешностью считывания линейки, радиус Земли равен 6400 км.

<u>**Ответ**</u>: **4a**. $\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \approx 10^{-4}$ (или в два раза меньше, если считается, что глаз способен различить половину цены деления). **4b**. $H \approx 900$ м.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

В пункте 4a ответы, полученные из расчёта, что минимальное смещение столба ртути, регистрируемое глазом, равно цене деления прибора или половине цены деления прибора, считаются верными.

Если верный ответ в пункте 4a не получен только вследствие вычислительных ошибок, при этом с физической точки зрения всё сделано абсолютно верно, то за этот пункт выставляется 3 балла.

Если верный ответ в пункте 4b не получен только вследствие вычислительных ошибок, при этом с физической точки зрения всё сделано абсолютно верно, то за этот пункт выставляется 3 балла.

В других случаях отдельные продвижения в решении оцениваются по следующей схеме.

Указывается, что состояние газа в маленьком шаре и трубке изменяется в изотермическом процессе — 1 балл.

Получено соотношение, связывающее малое относительное изменение ускорения свободного падения и малое относительное изменение давления, как в решении или аналогичное — 1 балл.

Получено соотношение, связывающее малые относительные изменения давления и объёма, как в решении или аналогичное — 1 балл.

Найдено верное соотношение, связывающее изменение объёма и смещение столба ртути в горизонтальной трубке — 0,5 балла.

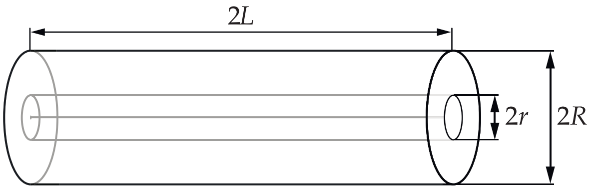
Найдено верное соотношение, связывающее изменение высоты столба ртути и смещение столба ртути в горизонтальной трубке — 0,5 балла.

Получена формула, дающая связь малого относительного изменения расстояния до центра Земли и ускорения свободного падения, как в решении или аналогичная — 1 балл.

Указывается, что относительная погрешность в определении положения столба ртути в горизонтальной трубке будет меньше 20 %, если столб ртути сдвинется не менее, чем на 3 линии — 0,5 балла.

5. Кольцо и стержень (6 баллов)
Крюков П. А.

В однородном диэлектрическом цилиндре длиной $2L$ и диаметром $2R$ сделан цилиндрический канал малого радиуса r ($r \ll R$), соосный цилиндру (см. рисунок, представленный ниже).



В канал вставлен однородно заряженный стержень длиной $2L$ круглого сечения, диаметр стержня чуть меньше диаметра канала. Стержень может двигаться свободно вдоль оси канала. На цилиндре закреплено тонкое однородно заряженное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра и делит цилиндр пополам. Кольцо и стержень на рисунке не изображены. Масса цилиндра с кольцом равна массе стержня и равна M. Стержень и кольцо несут одинаковые заряды разных знаков, равные по абсолютной величине q. Стержень смещают на небольшое расстояние x_0 ($x_0 \ll L$) от положения равновесия и отпускают.

5a. (*4 балла*) Чему равна максимальная скорость стержня, если цилиндр закреплён?

5b. (*2 балла*) Чему равна максимальная скорость стержня после освобождения системы, если цилиндр не удерживается внешней силой?

Гравитацией, всеми видами трения, а также эффектами, связанными с поляризацией диэлектрика, можно пренебречь.

Ответ: **5a**. $v = x_0 \cdot \sqrt{\frac{q^2}{m(L^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}}$. **5b**. $v = x_0 \cdot \sqrt{\frac{q^2}{2m(L^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}}$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

Если верный ответ в пункте 5a не получен только вследствие вычислительных ошибок, при этом с физической точки зрения всё сделано абсолютно верно, то за этот пункт выставляется 3 балла.

Если верный ответ в пункте 5b не получен только вследствие ошибок, ошибок, допущенных при расчёте в пункте 5a, то оценка за этот пункт не снижается.

Если верный ответ в пункте 5b не получен только вследствие вычислительных ошибок, при этом с физической точки зрения всё сделано абсолютно верно, то за этот пункт выставляется 1 балл.

В других случаях отдельные продвижения в решении оцениваются по следующей схеме.

Получено верное соотношение, связывающее малое смещение стержня и силу, действующую на него, как в решении или аналогичное — 1,5 балла. Если для силы получено неверное выражение только вследствие вычислительных ошибок, но идейно расчёт делается правильно, то — 1 балл. Если вместо силы сразу получено верное выражение для потенциальной энергии — 2,5 балла.

Если предварительно выражение для потенциальной энергии стержня не было получено, то за соотношение, дающее потенциальную энергию стержня, — 1 балл. Записано соотношение, связывающее максимальное смещение стержня от положения равновесия и его максимальную скорость, как в решении (закон сохранения энергии) или аналогичным образом — 1 балл. При ответе на вопрос второго пункта предлагается применить для расчёта понятие приведённой массы или использовать закон сохранения импульса — 1 балл.