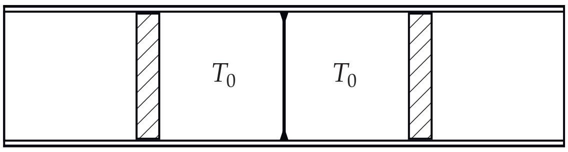
84-я Московская олимпиада школьников по физике
2023 год
11 класс, тур 1

Условия задач, авторские решения и критерии оценивания

1. Разная работа (8 баллов)
Крюков П. А., Бычков А. И.

В горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя подвижными теплоизолирующими поршнями находятся в состоянии теплового равновесия при температуре 310 К две порции идеального одноатомного газа, разделённые жёсткой, неподвижной, хорошо проводящей тепло перегородкой (см. рисунок). Поршни могут двигаться вдоль оси трубы, не испытывая сопротивления. Снаружи поршней находится воздух при атмосферном давлении. Количество газа в каждой порции равно 1 моль. К правому поршню прикладывается сила (меняющаяся со временем), и поршень медленно перемещается, температура газа при этом квазистатически уменьшается на 30 К. Универсальная газовая постоянная R равна 8,3 Дж/(моль · К).



1a. (*2 балла*) Найдите теплоёмкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в начале и в конце процесса охлаждения.

1b. (*6 баллов*) Какую работу $A_г$ совершает газ, располагающийся справа от перегородки, в процессе охлаждения? Какую работу A_F при этом совершает приложенная к поршню внешняя сила?

Решение

Изменение состояния газа слева и справа от перегородки происходит таким образом, что температура обоих порций остаётся одинаковой. Газ, располагающийся слева от перегородки, сжимается, поскольку его температура уменьшается при постоянном давлении, отдавая при изменении температуры на dT количество теплоты

$$\delta Q_L = c_{\text{p}} dT. \tag{1}$$

В формуле (1) считается, что $dT < 0$ и $\delta Q_L < 0$. Теплота (1) отдаётся порции газа в правом отсеке, которая получает количество теплоты, равное $\delta Q_R = -\delta Q_L = -c_{\text{p}} dT$ только от газа в левом отсеке, поэтому теплоёмкость этой порции в любой момент в процессе охлаждения равна

$$c = \frac{\delta Q_R}{dT} = \frac{-c_p dT}{dT} = -c_p = -\frac{5R}{2}. \tag{2}$$

Таким образом, с газом в правом отсеке совершается политропический процесс с показателем политропы

$$n = \frac{c - c_p}{c - c_V} = \frac{5R}{4R} = \frac{5}{4}.$$

Работа газа, находящегося в правом отсеке, может быть найдена из первого начал термодинамики. С учётом полученного значения теплоёмкости (2) имеем формулу

$$A_г = Q - \Delta U = -c_p \Delta T - c_V \Delta T \approx 1000 \text{ Дж}, \tag{3}$$

где $\Delta T = -30$ К. Для того, чтобы вычислить работу внешней силы, определим сначала конечный объём порции газа, расположенной справа от перегородки. Это можно сделать двумя способами.

Используя уравнение политропического процесса $pV^n = \text{const}$, где $n = \frac{5}{4}$ — показатель политропы, найденный выше, а также уравнение состояния идеального газа, имеем равенство

$$T^4 V = \text{const},$$

из которого следует формула для объёма в конце процесса охлаждения

$$V_1 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4. \tag{4}$$

С другой стороны, можно было бы записать соотношение, отражающее первое начало термодинамики для газа, расположенного справа от перегородки

$$-c_p dT = c_V dT + \frac{RT}{V} dV,$$

Из этого соотношения после преобразований и подстановки значений теплоёмкостей следует дифференциальное уравнение

$$-4 \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V},$$

интегрируя которое, получаем равенство

$$-4 \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

и далее формулу (4) для объёма.

Теперь можно перейти к определению работы внешней силы. Поскольку правый поршень перемещается очень медленно, суммарная работа всех сил, действующих на него, равна нулю, следовательно справедливо равенство $A_г + A_F - p_0(V_1 - V_0) = 0$, подставляя в которое объём из формулы (4) и работу газа из формулы (3), получаем ответ

$$A_F = RT_0 \left(\left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4 - 1 \right) - A_г \approx 300 \text{ Дж},$$

<u>Ответ</u>: **1a**. $c = -\frac{5R}{2}$; **1b**. $A_г = -4R\Delta T \approx 1000$ Дж, $A_F = p_0 \Delta V - A_г = RT_0 \left(\frac{T_0^4}{(T_0 + \Delta T)^4} - 1 \right) - A_г \approx 300$ Дж.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения. Оценка за ответ на любой из вопросов не снижается, если получены верные числовые ответы, но не приведены ответы в общем виде.

В пункте 1a найдена теплоёмкость в начале процесса охлаждения — 1 балл.

Найдена теплоёмкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в конце процесса охлаждения — 1 балл. Физически правильные рассуждения, не приводящие к верным ответам вследствие вычислительных ошибок, оцениваются из расчёта 0,5 балла за каждый из ответов.

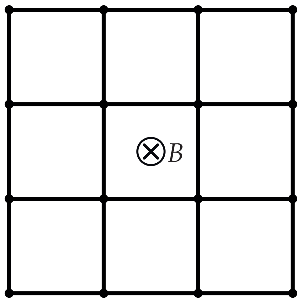
В пункте 1b верно найденная работа газа $A_г$ оценивается в 1,5 балла, верно найденная работа силы F в 4,5 балла.

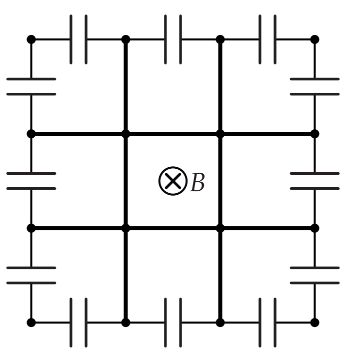
Если в пункте 1b на первый вопрос дан неверный ответ только вследствие вычислительных ошибок, то оценка за ответ на этот вопрос снижается до 1 балла. Если на второй вопрос дан неверный ответ только вследствие вычислительных ошибок, то такой ответ на второй вопрос оценивается в 3 балла. Если неверный ответ на второй вопрос является только следствием неверно найденной работы газа в первом вопросе, то оценка за ответ на второй вопрос не снижается.

Отдельные промежуточные результаты, полученные при ответе на второй вопрос, оцениваются по следующей схеме. Высказана мысль о том, что работа силы F есть разность работ сил атмосферного давления и работы газа — 1 балл. Указывается, что процесс политропический, записывается уравнение политропы — 0,5 балла. Если вместо уравнения политропы получено дифференциальное уравнение для определения изменения объёма, то тогда вместо баллов за уравнение политропы выставляется 0,5 балла за дифференциальное уравнение. Верно найдено изменение объёма — 1 балл. Если изменение объёма найдено неверно, но только вследствие вычислительных ошибок — 0,5 балла.

2. Токи и заряды (7 баллов)
Крюков П. А., Бычков А. И.

Внутри соленоида, ось которого вертикальна, располагается плоская проволочная сетка размером 3 × 3 ячейки. Ось соленоида перпендикулярна плоскости сетки и проходит через её центр (см. рисунок слева). Сопротивление перемычки, соединяющей два соседних узла, равно r. В соленоиде создаётся магнитное поле, направленное так, как показано на рисунке. Сила тока в витках соленоида равномерно увеличивается со временем, так что абсолютная величина скорости изменения магнитного потока через ячейку сетки оказывается равна $\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = 4\mathscr{E}_0$.





2a. (*4 балла*) Определите значения токов, текущих в перемычках, соединяющих узлы сетки. Сделайте рисунок, укажите направления этих токов.

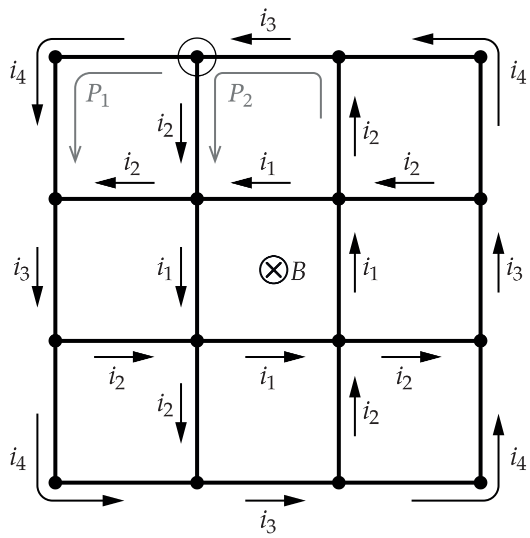
2b. (*3 балла*) Все перемычки на границе сетки заменили на конденсаторы одинаковой ёмкости (см. рисунок справа). Найдите напряжения на конденсаторах.

Решение

При повороте в плоскости рисунка вокруг оси соленоида на угол, кратный 90° (в любую сторону), схема переходит сама в себя. Отсюда следует, что по проводникам центральной ячейки текут одинаковые токи или, другими словами, по проводникам центральной ячейки циркулирует ток i_1. Для определения этого тока можно записать закон электромагнитной индукции только для центральной ячейки, как будто всей остальной сетки не существует, тогда направление тока i_1 — против часовой стрелки — следует из правила Ленца. Значение тока даётся формулой

$$i_1 = \frac{\mathscr{E}_0}{r}, \tag{5}$$

В каждом узле, лежащем в вершине центральной ячейки, соединяются 4 перемычки, по двум из которых текут токи i_1, причём один из них втекает в узел, а другой – вытекает. Следовательно, по двум другим перемычкам тоже текут одинаковые токи, один из которых втекает в узел, а второй — вытекает. Обозначим эти одинаковые токи i_2. Сделаем рисунок, на котором укажем направления токов в перемычках сетки, используя соображения «поворотной симметрии»: при повороте вокруг оси соленоида на угол, кратный 90°, картина распределения токов не должна изменяться.



Легко видеть, что в результате имеем 3 неизвестных тока: i_2, i_3, i_4. Вообще говоря, направления этих токов могут быть выбраны произвольно, например так, как показано на рисунке. Если в процессе решения значение какого-либо из токов окажется отрицательным, это будет означать, что истинное направление этого тока противоположно указанному на рисунке. Отметим, что записывая второе правило Кирхгофа для контуров, состоящих из ячеек сетки, следует выбирать направление обхода против часовой стрелки (в ячейках, обозначенных P_1 и P_2 на рисунке, направление обхода указано серыми стрелками). Как следует из правила Ленца, при таком выборе направления обхода ЭДС индукции в правой части уравнений, отражающих второе правило Кирхгофа, будет иметь положительное значение.

Перейдём непосредственно к расчёту токов. Записывая, для узла, помеченного окружностью на рисунке, первое правило Кирхгофа, имеем соотношение

$$i_4 = i_3 - i_2. \tag{6}$$

Второе правило Кирхгофа для контура P_1 даёт с учётом равенства (6) уравнение

$$i_3 - 2i_2 = \frac{2\mathscr{E}_0}{r}. \tag{7}$$

Аналогично, второе правило Кирхгофа для контура P_2 даёт равенство

$$i_3 + 2i_2 - i_1 = \frac{4\mathscr{E}_0}{r},$$

подставляя в которое ток i_1 из формулы (5), получаем уравнение

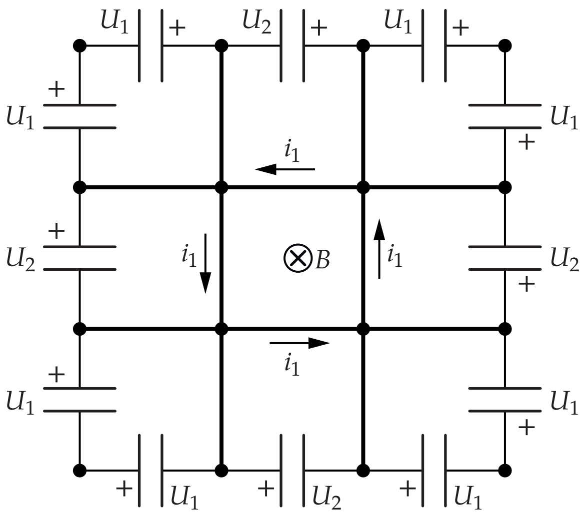
$$i_3 + 2i_2 = \frac{5\mathscr{E}_0}{r}. \tag{8}$$

Система уравнений (6)–(8) имеет решение

$$i_2 = \frac{3\mathscr{E}_0}{4r}, \quad i_3 = \frac{7\mathscr{E}_0}{2r}, \quad i_4 = \frac{11\mathscr{E}_0}{4r}. \tag{9}$$

Все значения в (9) получились положительными, следовательно направления токов на рисунке соответствуют реальности.

Во втором пункте, после замены перемычек на границе на конденсаторы, ток течёт только по проводникам центральной ячейки, этот ток равен $i_1 = \frac{\mathscr{E}_0}{r}$. Будем считать полярность зарядов на обкладках конденсаторов такой, как обозначено на рисунке. Если для напряжения на каком-либо конденсаторе получится отрицательное значение, то это будет означать, что на самом деле помеченная «+» обкладка заряжена отрицательно.



Напряжения на конденсаторах, располагающихся в угловых ячейках, одинаковы и равны $U_1 = 2\mathscr{E}_0$, поскольку сумма напряжений на этих конденсаторах должна быть равна (с точностью до знака) скорости изменения магнитного потока через ячейку. Сумма напряжений на всех конденсаторах должна быть равна абсолютной величине скорости изменения магнитного потока через все ячейки сетки.

Таким образом, для определения напряжения U_2 имеем уравнение

$$8U_1 + 4U_2 = 9 \cdot 4\mathscr{E}_0,$$

решая которое получаем ответ $U_2 = 5\mathscr{E}_0$.

Ответ: **2a**. $i_1 = \frac{\mathscr{E}_0}{r}$, $i_2 = \frac{3\mathscr{E}_0}{4r}$, $i_3 = \frac{7\mathscr{E}_0}{2r}$, $i_4 = \frac{11\mathscr{E}_0}{4r}$; направления токов показаны на первом рисунке, приведённом в решении задачи. **2b**. $U_1 = 2\mathscr{E}_0$, $U_2 = 5\mathscr{E}_0$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения. Оценка за ответ на любой из вопросов не снижается, если получены верные числовые ответы, но не приведены ответы в общем виде.

Если участник решал задачу, считая, что поток магнитного поля есть только через центральную ячейку сетки, а другие ячейки находятся вне области магнитного поля, то такое решение оценивается из расчёта 3 балла за всю задачу. При этом верные ответы для токов оцениваются в 2 балла, а правильно найденные напряжения конденсаторов в 1 балл.

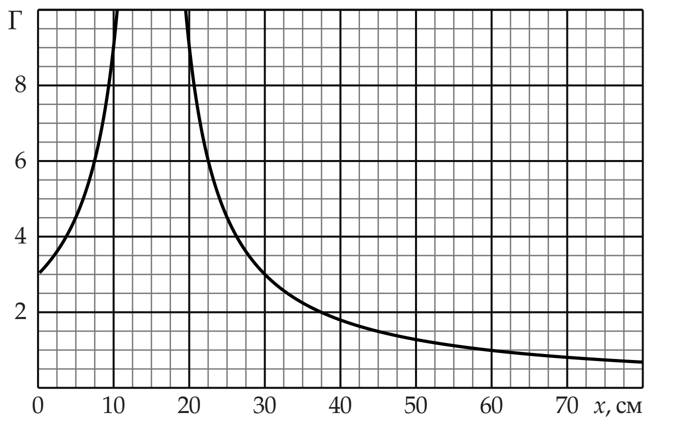
В пункте 2a предполагается 4 ответа. Любой из верных ответов оценивается в 1 балл. Если получен неверный ответ, но только вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то это приводит к снижению оценки за этот ответ на 50%. Если токи найдены верно, но их направления (все, или для некоторых токов) указаны неверно, то такие ответы оценивают в 3 балла за этот пункт. Если ответы не получены (или получены, но неверны) вследствие принципиальных ошибок, однако в решении высказываются разумные мысли об использовании соображений симметрии, например указывается, что неизвестных токов 4, то это оценивается в 0,5 балла.

В пункте 2b предполагается 2 ответа. Верно найденное напряжение конденсаторов в угловых ячейках (U_1) оценивается в 1 балл. Верно найденное напряжение конденсаторов в средних ячейках (U_2) оценивается в 2 балла. Если получен неверный ответ, но только вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то это приводит к снижению оценки за этот ответ на 50%. Если неверный ответ является следствием только неверного определения тока i_1 при ответе на вопрос пункта 1a, то такой ответ оценивается полным баллом.

3. Увеличение системы (7 баллов)
Крюков П. А.

Внутри трубы с непрозрачными стенками располагаются две одинаковые тонкие плосковыпуклые линзы. Плоскости линз перпендикулярны оси трубы (см. рисунок).

Наблюдатель рассматривает через систему линз небольшой предмет S, располагающийся на расстоянии x от передней линзы. График зависимости поперечного увеличения Γ от расстояния x показан на рисунке. Предполагая, что изображение формируется параксиальными (приосевыми) лучами, определите расстояние L между линзами, а также их фокусное расстояние f.



Решение

Покажем относительно короткое решение этой задачи. Пусть предмет находится на расстоянии $x \to 0$ от правой линзы, проще говоря, предмет находится вблизи оптического центра правой линзы. Тогда правая линза формирует мнимое изображение предмета, располагающееся также вблизи оптического центра правой линзы, при этом предмет изображается в линзе с поперечным увеличением $\Gamma_1 = \frac{f}{f-x}$, примерно равным 1. Изображение предмета в правой линзе является фиктивным предметом для второй линзы. Этот фиктивный предмет располагается на расстоянии L от левой линзы и, как следует из графика, изображается с увеличением $\Gamma_2 = 3$ в этой линзе. Отсюда следует уравнение

$$\left|\frac{f}{f-L}\right| = 3,$$

которое имеет два решения $L = \frac{4f}{3}$ и $L = \frac{2f}{3}$. Рассмотрим первое решение $L = \frac{4f}{3}$. Пусть расстояние до предмета меньше фокусного расстояния линзы: $x < f$. Тогда правая линза даёт мнимое изображение, располагающееся на расстоянии $y_1 = \frac{fx}{f-x}$, увеличение этого изображения равно

$$\Gamma_1 = \frac{f}{f-x} \qquad (10)$$

Расстояние от фиктивного предмета до левой линзы даётся формулой

$$x_1 = \frac{xf}{f-x} + \frac{4f}{3} = \frac{f(4f-x)}{3(f-x)},$$

Подставляя значение x_1 в формулу линзы, находим расстояние до изображения во второй линзе

$$y_1 = \frac{f(4f-x)}{f+2x}$$

и увеличение, с которым изображается фиктивный предмет во второй линзе

$$\Gamma_2 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{3(f-x)}{f+2x}. \qquad (11)$$

Перемножая увеличения, полученные в (10) и (11), находим формулу, дающую увеличение системы

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \frac{3f}{f+2x}. \qquad (12)$$

Из полученной формулы следует, что при изменении x от 0 до f увеличение уменьшается, что не соответствует графику, представленному в условии. Таким образом, значение $L = \frac{4f}{3}$ не походит.

Исследуем значение $L = \frac{2f}{3}$. В этом случае, считая $x < f$, и рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем вместо формул (11) и (12) соотношения

$$\Gamma_2 = \left|\frac{3(f-x)}{f-4x}\right|, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \left|\frac{3f}{f-4x}\right|. \qquad (13)$$

Легко видеть, что вторая формула из (13) соответствует приведённому в условии графику при $f = 60$ см. Расстояние между линзами, очевидно, равно $L = \frac{2f}{3} = 40$ см. Отметим, что ответы можно получить и другим способом, например, решая задачу «в лоб».

Ответ: $f = 60$ см, $L = \frac{2f}{3} = 40$ см.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

Если получены неверные ответы, но это явилось следствием только вычислительных ошибок или неверного считывания значений с графика, то такие ответы дают оценку 5 баллов за всю задачу.

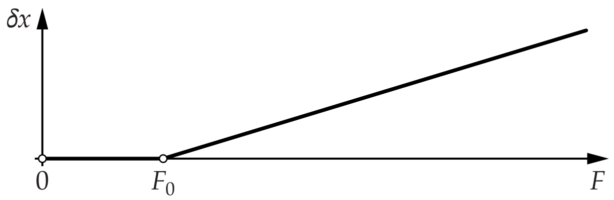
Промежуточные результаты, полученные в процессе решения, оцениваются по следующей схеме.

Указывается, что увеличение системы равно произведению увеличений в каждой из линз — 1 балл. Получена верная формула, дающая увеличение в первой линзе, для любых значений x или для x из некоторого диапазона — 1 балл. Получена верная формула, дающая увеличение во второй линзе, — 1,5 балла. Если получены неверные формулы, но только вследствие вычислительных ошибок, то за любую из формул для увеличения выставляется 0,5 балла. Если произведён анализ зависимости увеличения от x для отдельных точек и на основе этого анализа получены верные соотношения, связывающие L и f — 2 балла. Если соотношения неверны, но только вследствие вычислительных ошибок — 1 балл.

4. Поджатая пружина (11 баллов)

Власов А. И., Крюков П. А.

Зависимость относительного удлинения δx *поджатой пружины* от силы F, растягивающей её в невесомости, изображена на графике, представленном ниже ($\delta x = \frac{x}{L_0}$, L_0 — начальная длина пружины, x — удлинение). Пружина не растягивается, пока выполняется неравенство $F \le F_0$, если же сила F становится больше F_0, то относительное удлинение δx начинает зависеть от силы F по линейному закону $\delta x = \frac{F-F_0}{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \text{const}$.



Далее в задаче рассматриваются однородные пружины, для любого участка которых постоянные F_0 и ε такие же, как для исходной пружины длиной L_0. В каждом из пунктов масса пружины обозначается M. Коэффициентом упругости k поджатой пружины считается коэффициент пропорциональности между изменением силы и удлинением $k = \frac{F(x)-F_0}{x}$ при $F > F_0$. Во всех пунктах задачи рассматривается статическое равновесие пружин.

Безразмерные параметры $\gamma = \frac{kL_0}{Mg}$ и $f_0 = \frac{F_0}{Mg}$ (разные в разных пунктах задачи) характеризуют относительные жёсткость и силу поджатия пружины, g — ускорение свободного падения.

4a. (*1 балл*) От поджатой пружины длиной L_0 отрезали участок длиной ΔL (в недеформированном состоянии), который стали растягивать силой F ($F > F_0$) в невесомости. Найдите длину y этого участка под нагрузкой как функцию силы F и параметров ΔL, k, L_0.

4b. (*3 балла*) Поджатая пружина, параметры которой удовлетворяют соотношениям $f_0 > 1$, $\gamma = 1$, подвешена в поле тяжести к потолку за один из концов. К другому концу присоединяют груз массой $m = \mu M$ ($\mu > f_0$). Чему будет равна длина пружины в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0, f_0, μ.

4c. (*4 балла*) Пусть относительная сила поджатия удовлетворяет неравенству $f_0 < 1$. Пружина подвешена к потолку в поле тяжести за один из концов. Чему равна её длина в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0, f_0, γ.

4d. (*3 балла*) Поджатая пружина подвешена за один конец к потолку. К другому концу присоединяют грузы различной массы, снимая зависимость относительного удлинения $\delta L = \frac{L-L_0}{L_0}$ от относительной массы $\mu = \frac{m}{M}$ грузов (M — масса пружины). Результаты измерений представлены в таблице ниже.

μ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
δL, %	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	35,0	45,0

Определите относительную жёсткость γ и относительную силу поджатия f_0 этой пружины.

Решение

4a. В условии сказано, что параметры F_0 и ε остаются для любого куска пружины такими же, как для всей пружины, поэтому ответ на первый вопрос даётся формулой

$$y = \Delta L\left(1 + \frac{F - F_0}{kL_0}\right) \tag{14}$$

4b. В условиях этого пункта ($\mu > f_0$) любой элемент пружины деформируется под нагрузкой. Длину растянутой пружины можно найти, рассуждая следующими стандартным образом. Разделим всю недеформированную пружину на участки небольшой длины ΔL, пусть общее количество таких участков $N \gg 1$. Пусть участок с номером 1 будет самым верхним, тогда участок с номером k растягивается силой

$$F_k = Mg\left(\mu + \frac{L_0 - x_k}{L_0}\right), \tag{15}$$

где $x_k = k\Delta L$. Подставляя значение силы из формулы (15) в соотношение (14), и заменяя ΔL на dx, x_k на x, а y на dy, получаем равенство

$$dy = dx\left(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{\mu - \frac{x}{L_0}}{\gamma} - \frac{f_0}{\gamma}\right).$$

Поскольку $\gamma = 1$, определение длины пружины под нагрузкой сводится к интегрированию

$$L_1 = \int\limits_0^{L_0}\left(2 + \mu - \frac{x}{L_0} - f_0\right)dx = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0\right)L_0.$$

Отметим, что интеграл может быть вычислен, как площадь под прямой.

4c. В этом пункте часть пружины не растягивается, на неё действует сила, меньшая, чем F_0. Длина этого участка пружины равна

$$L' = L_0 \cdot f_0. \tag{16}$$

В этом случае формула, дающая связь силы и координаты x, аналогичная (15), имеет вид

$$F = Mg\left(1 - \frac{x}{L_0}\right), \tag{17}$$

Длина растягивающейся части пружины равна

$$L_2' = \int\limits_0^{L_0(1-f_0)}\left(1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{x}{\gamma L_0} - \frac{f_0}{\gamma}\right)dx. \tag{18}$$

Вычисляя интеграл (18), и прибавляя длину нерастягивающейся части пружины (17), получаем ответ

$$L_2 = L' + L_2' = L_0\left(1 + \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma}\right). \tag{19}$$

4d. Изучив таблицу, заметим, что при значениях относительной массы груза $\mu \ge 0{,}8$ зависимость $\delta L(\mu)$ линейная. Это означает, что при достаточно больших относительных массах груза все участки пружины удлиняются под нагрузкой (при малых μ) это не так. Рассуждая, как в пункте 4b, получим для больших относительных масс соотношение

$$\gamma = \frac{\delta L(\mu_2) - \delta L(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1},$$

из которого (с учётом значений, приведённых в таблице) следует ответ: $\gamma = 2$. Для определения относительной силы поджатия f_0 используем результат предыдущего пункта. При $\mu = 0$ из формулы (19) следует соотношение

$$\delta L(0) = \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma}.$$

Подставив найденное значение $\gamma = 2$ и $\delta L(0) = 0{,}01$ в эту формулу, находим второй ответ $f_0 = 0{,}8$.

Ответ: **4a**. $y = \Delta L\left(1 + \frac{F-F_0}{kL_0}\right)$; **4b**. $L_1 = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0\right)L_0$; **4c**. $L_2 = L_0\left(1 + \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma}\right)$; **4d**. $f_0 = 0{,}8$, $\gamma = 2$.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

Верные ответы оцениваются полным баллом вне зависимости от того, как они получены.

За пункт 4a можно получить или 1 балл или 0 баллов.

В пункте 4b правильное с физической точки зрения решение, приводящее к неверным ответам вследствие вычислительных ошибок, оценивается в 2 балла. Если в той или иной форме высказывается идея о делении пружины на небольшие участки и суммировании удлинений этих участков, но больше ничего нет — 0,5 балла за этот пункт. Если произведено суммирование (или интегрирование), но допущены принципиальные ошибки — 1 балл за весь пункт.

В пункте 4c правильное с физической точки зрения решение, приводящее к неверным ответам вследствие вычислительных ошибок, оценивается в 3 балла. Промежуточные результаты оцениваются по следующей схеме. Высказывается в той или иной форме мысль о том, что часть пружины не растягивается — 1 балл. Произведено суммирование (или интегрирование), но верный ответ не получен , поскольку допущены ошибки принципиального характера — 1 балл.

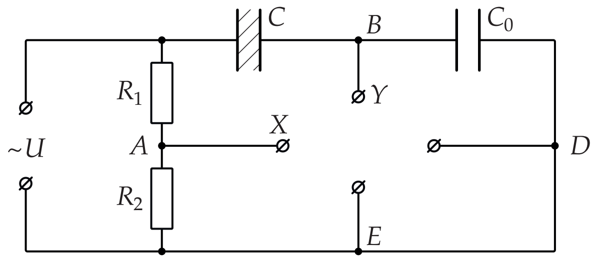
В пункте 4d верное определение относительной жёсткости оценивается в 2 балла. Верное определение относительной силы поджатия оценивается в 1 балл. Если правильные ответы не получены только вследствие вычислительных ошибок, а в остальном решение абсолютно верное, то ставится 2 балла за весь пункт. Если при нахождении относительной силы поджатия используется неверная формула, полученная при ответе на вопрос пункта 4c, то оценка за этот пункт не снижается.

5. Диэлектрический гистерезис (12 баллов)

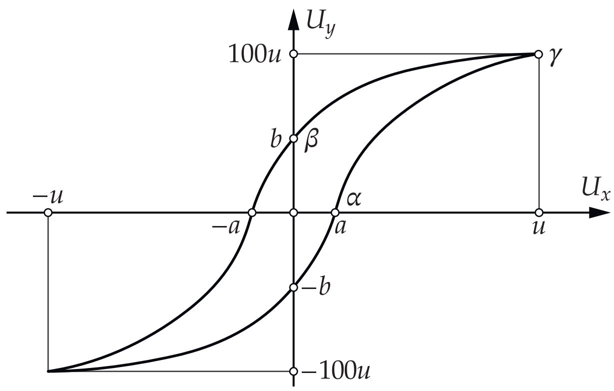
Крюков П. А.

В плоском нелинейном конденсаторе пространство между обкладками заполнено нелинейным диэлектриком, поэтому зависимость заряда конденсатора от напряжения между обкладками может быть более сложной, чем в линейном случае, для которого $q = CU$. При циклическом изменении напряжения зависимость $q(U)$ для нелинейного конденсатора имеет вид петли гистерезиса.

5a. (*5 баллов*) Для изучения свойств нелинейного конденсатора C собрали цепь, изображённую на рисунке.

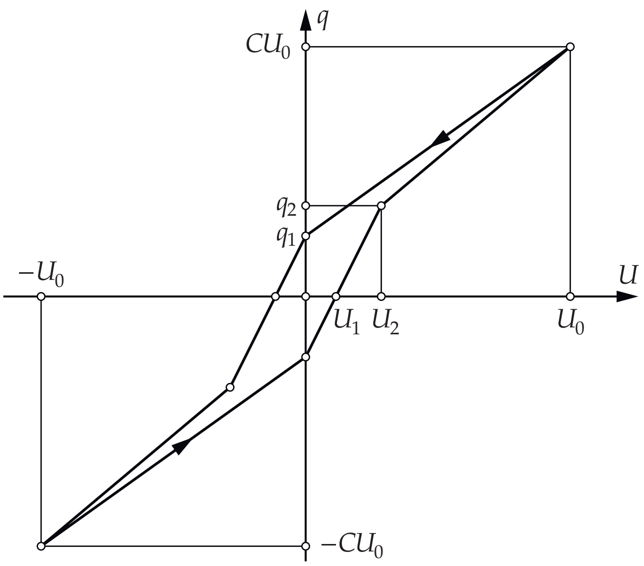


Ёмкость обычного (линейного) эталонного конденсатора C_0 удовлетворяет сильному неравенству $C_0 \gg \frac{100S\varepsilon_0}{d}$, где d и S — расстояние между обкладками нелинейного конденсатора и их площадь. Сопротивления резисторов подобраны так, что выполняется равенство $\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{S\varepsilon_0}{dC_0}$. На вход цепи подаётся гармоническое напряжение $U(t)$. К точкам A и B подключены выводы пластин осциллографа, отклоняющих луч по горизонтали и вертикали соответственно. На экране осциллографа наблюдается зависимость напряжения $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ между точками B и E от напряжения $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ между точками A и D, изображённая на рисунке. Подключение осциллографа не меняет распределение токов и потенциалов в цепи.



Определите напряжённость поля E в диэлектрической пластине, а также абсолютную величину поверхностной плотности поляризационных зарядов $|\sigma_\text{p}|$ на одной из сторон пластины (соприкасающейся с обкладкой конденсатора) в точках графика, помеченных буквами α, β, γ. Параметры нелинейного конденсатора S и d, ёмкость C_0 эталонного конденсатора, а также обозначенные на графике параметры петли a, b, u считаются известными. Электрическая постоянная равна ε_0.

5b. (*7 баллов*) Другой нелинейный конденсатор подключают последовательно с резистором сопротивлением R к генератору прямоугольных импульсов с частотой n, напряжение между выводами которого в течение первой половины периода равно U_0, а в течение второй половины периода равно $-U_0$. В установившемся режиме заряд одной из обкладок конденсатора q в зависимости от напряжения между обкладками U изменяется так, как показано на графике, приведённом на рисунке ниже.



Параметры петли гистерезиса, обозначенные на графике, равны $U_1 = 0{,}1U_0$, $U_2 = 0{,}25U_0$, $q_1 = 2CU_1$, $q_2 = q_1 + 0{,}1CU_0$. Значения U_0 и C известны, при этом $nRC \ll 1$. Найдите среднюю за период мощность, потребляемую цепью от генератора и среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе. Ответы выразите через параметры C, U_0, n.

Решение

5a. Сначала рассмотрим точку γ графика зависимости $U_y\,(U_x)$. Справедливы соотношения:

$$100u = \frac{q^{(\gamma)}}{C_0}, \qquad u = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(E^{(\gamma)}d + 100u\right), \tag{20}$$

где $q^{(\gamma)}$ — заряд эталонного конденсатора, $E^{(\gamma)}$ — напряжённость поля в диэлектрической пластине в данный момент. Из условия следует сильное неравенство

$$\frac{100R_2}{R_1 + R_2} \ll 1, \tag{21}$$

поэтому второе уравнение из (20) можно переписать так

$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E^{(\gamma)}d. \tag{22}$$

Таким образом, напряжение $U_x = 100u$ в точке γ пропорционально заряду $q^{(\gamma)}$ эталонного конденсатора, а следовательно (поскольку заряды конденсаторов равны) и заряду нелинейного конденсатора. Напряжение $U_y = u$ в точке γ пропорционально напряжению на нелинейном конденсаторе. Подставляя в формулу (22) соотношение из условия, имеем искомую напряжённость

$$E^{(\gamma)} = \frac{C_0 u}{S\varepsilon_0}. \tag{23}$$

Поверхностная плотность поляризационных зарядов найдётся из соотношения

$$\frac{q^{(\gamma)}}{S\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_\text{p}^{(\gamma)}|}{\varepsilon_0} = E^{(\gamma)}.$$

Подставим в это соотношение заряд $q^{(\gamma)}$ из первого уравнения из (20), а напряжённость поля из формулы (23), после несложных преобразований получим ответ

$$|\sigma_\text{p}^{(\gamma)}| = \frac{100C_0u}{S} - \frac{C_0u}{S} = \frac{99C_0u}{S}$$

Теперь рассмотрим точку β. Легко видеть, что сумма напряжений на нелинейном и обычном конденсаторе в состоянии, соответствующем этой точке на графике, равна нулю. Этот факт отражает уравнение

$$\left(\frac{C_0b}{S\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_\text{p}^{(\beta)}|}{\varepsilon_0}\right)d - b = 0, \tag{24}$$

ведь заряд нелинейного конденсатора в этом случае равен C_0b (с точностью до знака). Из условия следует сильное неравенство $\frac{C_0d}{S\varepsilon_0} \gg 1$, поэтому пренебрегая последним слагаемым в уравнении (24), получаем искомую поверхностную плотность

$$|\sigma_\text{p}^{(\beta)}| = \frac{C_0b}{S}.$$

Наконец рассмотрим состояние диэлектрика, соответствующее точке α. Заряды конденсаторов в этом состоянии, очевидно, равны нулю, поэтому напряжённость поля в диэлектрике создаётся только поляризационными зарядами, следовательно справедливо равенство

$$\frac{|\sigma_\text{p}^{(\alpha)}|}{\varepsilon_0} \cdot d \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = a. \tag{25}$$

Используя соотношение для сопротивлений, данное в условии, из равенства (25) имеем ответы:

$$|\sigma_\text{p}^{(\alpha)}| = \frac{C_0a}{S}, \qquad E^{(\alpha)} = \frac{C_0a}{S\varepsilon_0}.$$

5b. Сильное неравенство $nRC \ll 1$, приведённое в условии, означает, что время, за которое заряды на обкладках конденсатора устанавливаются, значительно меньше периода колебаний напряжения.

Пусть в некоторый момент времени напряжение на выводах генератора и на конденсаторе равно $-U_0$. При изменении полярности напряжения на выводах генератора, последний перемещает заряд $Q = 2CU_0$, совершая работу $A_g^{(1/2)} = 2CU_0^2$. При обратном изменении полярности на выводах генератора, он совершает такую же работу по перемещению заряда. Таким образом, за период генератор совершает работу $A_g = 2A_g^{(1/2)} = 4CU_0^2$, следовательно средняя мощность, потребляемая цепью от генератора равна $P_g = 4CU_0^2n$.

Заметим, что если бы зависимость заряда конденсатора от напряжения на нём была бы линейной ($q = CU$), то вся мощность, потребляемая цепью от генератора, выделялась бы в виде тепла на резисторе. В случае нелинейного конденсатора часть работы, совершаемой генератором, тратится на «переполяризацию диэлектрика». При увеличении заряда нелинейного конденсатора от значения

$-CU_0$ до значения CU_0 электрические силы совершают работу равную $A_p^{(1/2)} = \int Udq$, численно эта работа равна площади половины петли гистерезиса, располагающейся справа от оси ординат. Очевидно, что работа электрических сил по перезарядке конденсатора за период равна площади всей петли гистерезиса $A_p = 2A_p^{(1/2)}$ — это и есть потери энергии на переполяризацию диэлектрика. Таким образом, из закона сохранения энергии следует, что на резисторе за период выделяется количество теплоты равное $Q = A_g - A_p$. Определение A_p, как уже было сказано, сводится к расчёту площади петли гистерезиса, которая может быть найдена разными способами. Приведём здесь конечный ответ $A_p = 0{,}2CU_0^2$. Таким образом, искомая мощность равна $P_R = 3{,}8CU_0^2 n$.

Ответ: **5a**. $|\sigma_{\text{p}}^{(\alpha)}| = \frac{C_0 a}{S}$, $|\sigma_{\text{p}}^{(\beta)}| = \frac{C_0 b}{S}$, $|\sigma_{\text{p}}^{(\gamma)}| = \frac{99C_0 u}{S} \approx \approx \frac{100C_0 u}{S}$; $E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S\varepsilon_0}$, $E^{(\gamma)} = \frac{C_0 u}{S\varepsilon_0}$. **5b**. $P_g = 4CU_0^2 n$, $P_R = = 3{,}8CU_0^2 n$.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

Пункт 5a предполагает пять ответов. Каждый из верно найденных ответов оценивается в 1 балл вне зависимости от того, каким способом он был получен. При этом для $|\sigma_{\text{p}}^{(\gamma)}|$ верными считаются оба ответа и $\frac{99C_0 u}{S}$ и $\frac{100C_0 u}{S}$. Правильное с физической точки зрения решение, приводящее к неверному ответу вследствие вычислительных ошибок, оценивается в 50 % от максимального количества баллов за соответствующий ответ. Если не один верный ответ не был получен, однако решение содержит отдельные разумные утверждения, то такое решение даёт оценку 0,5 за весь пункт.

В пункте 5b верный ответ на первый вопрос (о средней мощности генератора) оценивается в 2 балла, а верный ответ на второй вопрос — в 5 баллов. Если на первый вопрос дан неверный ответ, вследствие вычислительных ошибок или невнимательности (например, дан ответ в два раза меньше верного), то за этот вопрос — 1 балл. Верный ответ на второй вопрос оценивается полным баллом при любом способе решения. Если верный ответ не найден, только вследствие ошибки при вычислении мощности, потребляемой от генератора, второй вопрос оценивается полным баллом.

Промежуточные результаты при ответе на второй вопрос оцениваются по следующей схеме. Высказана мысль о том, что мощность, выделяющаяся на резисторе, равна разности мощности генератора и мощности потерь на переполяризацию в диэлектрике, — 1 балл. Указывается (тем или иным образом), что потери на переполяризацию за период численно равны площади петли гистерезиса — 2,5 балла. Верное вычисление площади петли — 1 балл.