

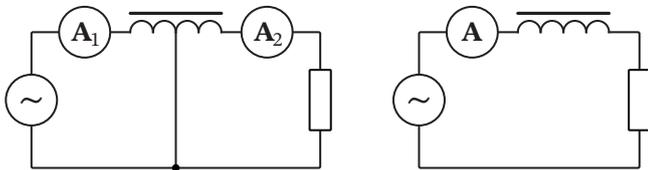


Условия задач, авторские решения и критерии оценивания

1. Как в трансформаторе (9 баллов)

Крюков П. А.

Катушка намотана проводом пренебрежимо малого сопротивления на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью, так что при протекании тока по виткам катушки рассеяния магнитного потока не происходит. К витку в середине катушки присоединён провод, и собрана цепь, показанная на рисунке слева. Напряжение на выводах идеального генератора меняется по гармоническому закону, амплитуда напряжения не зависит от подключаемой нагрузки. Идеальные амперметры переменного тока A_1 и A_2 показывают токи I_1 и I_2 .



Что показывает идеальный амперметр переменного тока в цепи на рисунке справа, если эта цепь составлена из тех же элементов, что и цепь на рисунке слева?

Ответ: $I = I_2 \cdot \sqrt{\frac{I_1^2 - I_2^2}{I_1^2 + 15I_2^2}}$.

Критерии

Верный ответ оценивается полным баллом при любом способе решения. Если полученный неверный ответ является следствием только вычислительных ошибок (при этом физически всё сделано верно), то выставляется 7 баллов за всю задачу.

Если верный ответ не получен, то отдельные продвижения в решении задачи оцениваются по следующей схеме.

Если считается, что амперметры показывают не действующее значение, а амплитудное, оценка не снижается.

Получено верное выражение для тока I_2 — 2 балла.

Указывается в той или иной форме, что магнитный поток через любую из частей катушки создаётся токами в обеих частях — 1 балл.

Записаны верные уравнения для определения токов, как в решении, или аналогичные — 2 балла. Получено верное выражение для тока I_1 — 2 балла. Если получено неверное выражение только вследствие вычислительных ошибок, то 1 балл за этот пункт.

2. Излучает и падает (10 баллов)

Фольклор

В соответствии с законами классической электродинамики заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эф-

фекты в этой задаче не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная равны m_e , e , c и ε_0 соответственно.

2а. (4 балла) Пусть электрон движется вокруг протона по орбите, близкой к круговой. Протон считаем неподвижным, поскольку его масса много больше m_e . Известно, что мощность излучения движущегося электрона дается формулой

$$P = A \cdot e^\alpha c^\beta \varepsilon_0^\gamma a^\delta,$$

где a — ускорение электрона, A — безразмерная константа. Определите показатели степени: α , β , γ , δ .

2б. (6 баллов) В процессе излучения энергия электрона уменьшается, поэтому он движется не по окружности, а по спирали и в некоторый момент времени должен упасть на протон. Предполагая, что за время, равное периоду обращения электрона, расстояние R между электроном и протоном изменяется незначительно, а также считая известной постоянную A в приведённой выше формуле, определите время Δt , за которое расстояние R уменьшается от известного значения R_0 на ΔR , при условии, что $\Delta R \ll R_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое расстояние R уменьшается от значения R_0 до значения $\frac{R_0}{2}$.

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1.$$

Ответ: **2а.** $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$. **2б.** $\Delta t = \frac{2\pi c^3 \varepsilon_0^2 m^2}{Ae^4} R_0^2 \Delta R$; $t_{1/2} = \frac{7}{12} \cdot \frac{\pi c^3 \varepsilon_0^2 m^2}{Ae^4} \cdot R_0^3$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

В пункте 2а предполагается 4 ответа. Любой из верных ответов оценивается в 1 балл. Если в начале решения какая-то степень была найдена неверно, и только вследствие этого (!) другая степень в последующем решении была найдена неверно, то за нахождение этой другой степени выставляется полный балл.

В пункте 2б верные ответы даже при отсутствии подробных объяснений оцениваются полным баллом. Если верные ответы не были получены только вследствие вычислительных ошибок, то выставляется 4 балла за этот пункт. Если найден верно только первый ответ, но не произведено интегрирование и не найден второй ответ, то выставляется 4 балла за этот пункт.

При отсутствии правильного ответа отдельные продвижения в решении пункта 2б оцениваются по следующей схеме.

Указано, что ускорение можно считать приближённо равным центростремительному ускорению — 0,5 балла. Записан второй закон Ньютона — 0,5 балла.

Записано выражение для энергии электрона $E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} - 1$ балл.

Указывается, что скорость изменения энергии электрона равна по абсолютной величине мощности излучения — 1 балл.

3. Похоже на диод (11 баллов)

Фольклор

Две плоские металлические пластины площадью S располагаются параллельно друг другу в точках с координатами $x = 0$ (первая пластина) и $x = d$ (вторая пластина), при этом $S \gg d^2$. Ось Ox перпендикулярна пластинам. Первая пластина заземлена, потенциал второй пластины равен $-U_0$. Пространство между пластинами заполнено полупроводником, в котором носителями заряда являются частицы с зарядом q ($q > 0$). Ток в полупроводнике — это коллективное, направленное движение этих частиц. Диэлектрическая проницаемость полупроводника равна единице. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

3а. (5 баллов) При больших значениях U_0 можно считать, что средняя скорость движения носителей в направлении поля в точке с координатой x в пространстве между пластинами пропорциональна напряжённости поля в этой точке $v(x) = \mu E(x)$, где μ — известная константа.

Пусть ток между пластинами установился, средняя скорость носителей $v(x)$, плотность заряда $\rho(x)$ и потенциал $U(x)$ не меняются со временем. Предполагая, что потенциал зависит от координаты по степенному закону $U(x) = Ax^\alpha$, определите значения постоянных A и α . Найдите ток между пластинами. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d и S .

3б. (4 балла) При небольших значениях U_0 движение носителей обусловлено диффузией. Сила тока в этом случае удовлетворяет соотношению

$$I = -S \left(\frac{\mu k T}{q} \right) \frac{d\rho}{dx},$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Пусть ток между пластинами установился. Предполагая степенную зависимость потенциала от координаты $U(x) = Bx^\beta$, определите значения постоянных B и β . Найдите силу тока. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d, q, T и S .

3с. (2 балла) Какому сильному неравенству вида

$$U_0 \ll f(q, \mu, T)$$

должно удовлетворять значение потенциала U_0 , чтобы его можно было считать небольшим, как в пункте 3б?

Ответ: 3а. $\alpha = \frac{3}{2}$, $A = -\frac{U_0}{\frac{3}{2}}$, $I = \frac{9}{8} \cdot \frac{\mu \epsilon_0 S U_0^2}{d^3}$. 3б. $\beta = 3$, $B = -\frac{U_0}{d^3}$, $I = -\frac{6\epsilon_0 U_0 \mu k T S}{q d^3}$. 3с. $U_0 \ll \frac{kT}{q}$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

Если в пункте 3а получен неверный ответ только вследствие вычислительных ошибок, то выставляется 3,5 балла за весь этот пункт. В этом пункте верное нахождение

показателя степени оценивается в 4 балла, а верное нахождение постоянной A в 1 балл.

Если в пункте 3б получен неверный ответ только вследствие вычислительных ошибок, то выставляется 3 балла за весь этот пункт. В этом пункте верное нахождение показателя степени оценивается в 3,5 балла, а верное нахождение постоянной B в 0,5 балла.

Если в пункте 3с получено верное сильное неравенство, то неважно каким способом оно получено. Если верный ответ в пункте 3с никак не обосновывается, то выставляется 1 балл за весь этот пункт.

Отдельные продвижения при ответе на вопросы пунктов 3а и 3б оцениваются следующим образом.

Записано условие постоянства тока — 2 балла.

Есть формула, дающая связь потенциала и напряжённости, — 1 балл.

Записана теорема Гаусса, из которой следует соотношение, связывающее плотность заряда и напряжённость — 1 балл.

Указывается, что константа A или B может быть определена по значению в крайней точке — 0,5 балла.

4. Термодинамика жидкости (13 баллов)

Заяц А. Е.

Коэффициент теплового расширения при постоянном давлении некоторой жидкости равен $\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta T} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, сжимаемость этой жидкости при постоянной температуре равна $\beta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta P} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, а её молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна $c_V = 112 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Эти параметры можно считать постоянными в условиях данной задачи. Внутренняя энергия одного моля рассматриваемой жидкости является функцией двух переменных: молярного объёма V и температуры T и даётся формулой

$$U(V, T) = A_1 T + A_2 V + A_3 VT - pV,$$

где A_1, A_2, A_3 — неизвестные константы, V — молярный объём, $p = p(V, T)$ — давление, являющееся функцией тех же двух переменных V и T .

4а. (2 балла) Считая молярный объём V функцией двух переменных: давления p и температуры T , выразите малое изменение dV через V , малые изменения dp и dT , а также данные в условии постоянные.

4б. (2 балла) Определите зависимость давления от температуры $p(T)$ в изохорном процессе, считая известным значение давления p_0 при температуре T_0 . Ответ выразите через заданные в условии постоянные, а также параметры p_0 и T_0 .

4с. (2 балла) Найдите значения постоянных A_1 и A_3 в выражении для внутренней энергии. Получите числовые ответы.

4д. (5 баллов) Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно, совершаемый с жидкостью, определите значение постоянной A_2 в выражении для внутренней энергии. Получите числовой ответ.

4е. (2 балла) Для заданной температуры T_0 определите значение молярной теплоёмкости при постоянном давлении c_p , если молярный объём жидкости в рассматриваемом состоянии также известен и равен V_0 .

Ответ: 4а. $dV = \alpha V dT - \beta V dp$. 4б. $p(T) = p_0 + \frac{\alpha}{\beta}(T - T_0)$.
 4с. $A_1 = c_V = 112 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, $A_3 = \frac{\alpha}{\beta} \approx 6,8 \cdot 10^5 \frac{\text{Па}}{\text{К}}$.
 4д. $A_2 = -\frac{1}{\beta} = -1,1 \cdot 10^9 \text{ Па}^{-1}$. 4е. $c_p = c_V + \frac{\alpha^2 T_0 V_0}{\beta}$.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

Верные ответы оцениваются полным баллом вне зависимости от того, как они получены.

В пункте 4с верное нахождение каждой из констант оценивается в 1 балл. Если какая-то константа найдена неверно только вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то оценка снижается до 0,5 балла за эту константу.

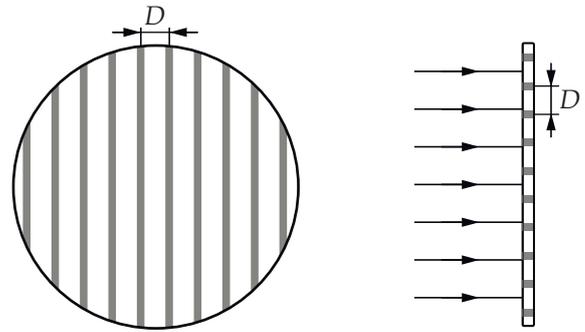
Если в пункте 4д неверный ответ является только следствием неверно найденных в предыдущих пунктах констант, то оценка за этот пункт не снижается. Если неверный ответ в 4д обусловлен только вычислительными ошибками, то выставляется 4 балла за весь пункт. Отдельные продвижения при ответе на вопрос этого пункта оцениваются по следующей схеме: 1) записана формула для КПД цикла Карно — 0,5 балла; 2) указывается, что работа может быть рассчитана, как площадь параллелограмма $A_1 A_2 34$ — 1 балл; если получено соотношение $\Delta A = \frac{\alpha}{\beta} \Delta V \Delta T$ — 0,5 балла; получено верное выражение для ΔQ — 1 балл.

Если в пункте 4е неверный ответ является только следствием неверно найденных в предыдущих пунктах констант, то оценка за этот пункт не снижается. Если неверный ответ в 4е обусловлен только вычислительными ошибками, то выставляется 1 балл за весь пункт.

5. Решётки (12 баллов)

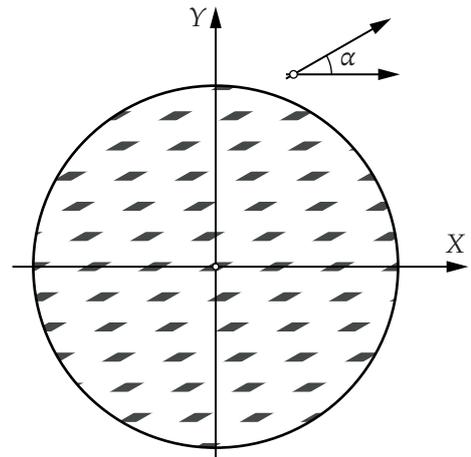
Крюков П. А.

Дифракционная решётка (см. рисунок ниже) представляет собой непрозрачную пластинку, в которой с пространственным периодом D сделаны N ($N \gg 1$) узких прорезей (штрихов) толщиной h . Обратите внимание, на рисунке прозрачные области показаны серым. В первых двух пунктах этой задачи мы рассматриваем решётки, содержащие $n = 100$ штрихов на миллиметр, считая при этом, что $h = 0,2D$. Решётки располагаются параллельно экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, на расстоянии $L = 3 \text{ м}$ от него. Экраном считается участок вертикальной стены высотой 1 м и шириной 2 м. Решётки освещаются лучом лазерной указки, параметры которой одинаковые для всех пунктов: диаметр пучка $d = 2 \text{ мм}$, длина волны $\lambda = 532 \text{ нм}$. В первых двух пунктах свет падает на решётки по нормали. Середины решётки и экрана лежат на одном перпендикуляре к плоскости экрана.



5а. (2 балла) Пусть штрихи решётки ориентированы вертикально. При нормальном падении лазерного луча на решётку на экране наблюдается система ярких пятен. Сколько всего светлых пятен будет видно на экране? Чему будет равно расстояние между соседними пятнами вблизи центра экрана?

5б. (6 баллов) Пусть две дифракционные решётки накладываются друг на друга. Штрихи одной решётки располагаются горизонтально, а штрихи другой составляют угол α с горизонтальной прямой. В результате получается непрозрачная пластинка, на которой периодически распределяются прозрачные области в виде параллелограммов. Схематично такая пластинка показана на рисунке ниже, тёмные параллелограммы символизируют прозрачные области.

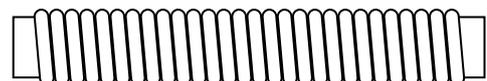


При освещении такой двумерной решётки лазером на экране наблюдается система светлых пятен. Пусть на экране задана система координат YOX , направление осей OY и OX совпадает с направлением осей на рисунке, начало координат находится в центре экрана.

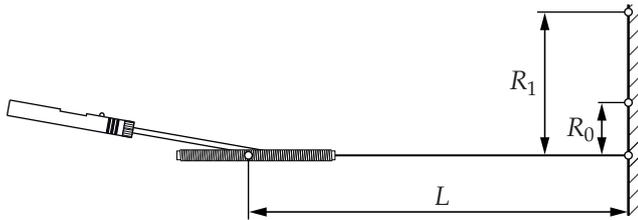
Пусть угол α равен $\frac{\pi}{2}$. Сделайте рисунок, изобразите дифракционную картину. Укажите координаты нескольких светлых пятен на экране, располагающихся вблизи начала координат.

Изобразите схематично дифракционную картину и определите координаты светлых пятен для случая $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

5с. (4 балла) Гитарная струна с оплёткой представляет собой отражательную дифракционную решётку. Оплётка — это тонкая проволока, навитая в один слой виток к витку на сердечник струны (см. рисунок).



При освещении горизонтально расположенной струны лучом лазерной указки, направленным под небольшим углом к горизонтали (см. рисунок, представленный ниже), на вертикальном экране, находящемся в 2-3 метрах от струны, наблюдается дифракционная картина в виде концентрических полуокружностей. В эксперименте были измерены следующие величины: расстояние от точки падения лазерного луча на струну до стены $L = 2$ м, радиусы первых двух полуокружностей $R_0 = 4$ см, $R_1 = 12,5$ см. «Первых двух» означает наименьшей и следующей по размеру. Использовался тот же лазер, что и в предыдущих пунктах ($\lambda = 532$ нм). Определите по этим данным диаметр проволоки оплётки.



Ответ: 5a. $\Delta x \approx \frac{L\lambda}{D} \approx 16$ см; 11 пятен. **5b.** Для пересечения под прямым углом: $x = \frac{L\lambda}{D}n$, $y = \frac{L\lambda}{D}m$, где m и n — целые числа. Для пересечения под углом α : $x = \frac{n\lambda L}{D} \sin \alpha$, $y = -\frac{n\lambda L}{D} \cos \alpha + \frac{m\lambda L}{D}$. **5c.** $D \approx 0,3$ мм.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

В пункте 5a каждый из ответов оценивается в 1 балл. Если во втором вопросе получено 13 светлых пятен, а не 11, а в остальном всё верно, то за весь пункт выставляется 1,5 балла. Если неверные ответы являются только следствием вычислительных ошибок, то оценка за каждый неверный ответ снижается на 50 %.

В пункте 5b верный ответ на первый вопрос оценивается в 2 балла, а верный ответ на второй вопрос — в 4 балла. Если нет рисунков, оценка снижается на полбалла за весь пункт. Если на первый вопрос дан неверный ответ, вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то выставляется 1 балл за этот вопрос. Если на второй вопрос дан неверный ответ, вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то выставляется 3 балла за этот вопрос. Если предложен верный метод расчёта, но больше ничего нет, выставляется 3 балла за весь этот пункт.

Если верный ответ в пункте 5c не получен, только вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то выставляется 3 балла за весь этот пункт. Если получена верная формула, дающая направления на дифракционные максимумы, но больше ничего нет, то выставляется 2 балла за весь этот пункт.