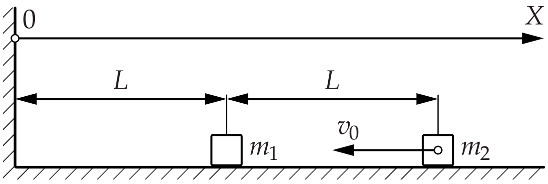
84-я Московская олимпиада школьников по физике
2023 год
10 класс

1. Казалось бы, при чём здесь π? (12 баллов)
На гладком горизонтальном столе покоятся два маленьких бруска, массы которых равны $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 10^N$ кг, где N — некоторая константа. В момент времени $t = 0$ второму бруску сообщают скорость v_0 (см. рисунок). Столкновения брусков друг с другом и со стенкой в процессе дальнейшего движения считаются абсолютно упругими.



Пусть ось OX направлена вправо, координата стенки равна нулю. Проследим за движением брусков, рассмотрев зависимость $x_2(x_1)$ — координаты второго бруска в некоторый момент времени от координаты первого в тот же момент. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2, соответствует точка M с координатами (x_1, x_2). Со временем координаты брусков изменяются, а точка M движется по плоскости X_1OX_2.

1a. (*2 балла*) Найдите скорость точки M в момент, когда проекции скоростей брусков на ось OX равны v_1 и v_2 соответственно. Какой угол составляет вектор скорости точки M с осью OX_1? Нарисуйте траекторию движения точки M по плоскости X_1OX_2 для значений масс $m_1 = m_2 = 1$ кг ($N = 0$).

Введём в рассмотрение координаты $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, связанные с координатами (x_1, x_2) формулами $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}x_1$ и $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}x_2$. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2, соответствует точка $\tilde{M}$ с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ на плоскости $\tilde{X}_1O\tilde{X}_2$.

1b. (*4 балла*) Воспользовавшись законом сохранения энергии, покажите, что величина скорости точки $\tilde{M}$ сохраняется при абсолютно упругом ударе брусков.

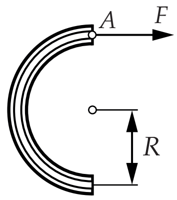
Пусть за мгновение перед столкновением брусков острый угол между прямой, задаваемой уравнением $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$, и скоростью точки $\tilde{M}$ равен α. Используя законы сохранения импульса и энергии, докажите, что после столкновения брусков острый угол между прямой $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$ и скоростью точки $\tilde{M}$ также равен α.

1c. (*3 балла*) На каком расстоянии от стенки произойдёт пятое столкновение брусков, если параметр N равен 2?

1d. (*3 балла*) Сколько раз столкнётся брусок массой m_1 с бруском массой m_2 и стенкой при $N = 4$?

Указание. Может оказаться полезной приближённая формула $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$, справедливая при малых x ($x \ll 1$).

2. Тянут канат (6 баллов)
Внутри закреплённой горизонтальной тонкой трубки, изогнутой в форме полуокружности радиуса R, расположен однородный гибкий канат длиной πR, масса которого равна m. Канат начинают тянуть за свободный конец A, прикладывая силу по касательной, как показано на рисунке. Чему равна и куда направлена суммарная сила реакции трубки, действующая на канат, если ускорение точки A каната равно a? Считайте внутренние стенки трубки гладкими, а канат нерастяжимым. Рассмотрите начальный момент времени, когда скорость каната равна нулю. Силой тяжести можно пренебречь.



3. Баллон на платформе (9 баллов)
Тележка установлена на горизонтальных прямолинейных рельсах и может двигаться по ним без сопротивления. На тележке закреплён сосуд цилиндрической формы, ось которого параллельна рельсам. Длина цилиндра и его радиус равны L и r соответственно. Масса тележки с пустым сосудом равна M. Сосуд заполняют идеальным газом массой m при температуре T_0. Одно основание сосуда поддерживают при температуре T_0. Температура другого основания в начальный момент также равна T_0, но затем её медленно увеличивают до величины $T_0 + \Delta T$ (при этом известно, что $\Delta T \ll T_0$). Боковая поверхность сосуда теплоизолирована.

Введём ось OX, направив её вдоль оси цилиндра от основания с температурой $T_0 + \Delta T$ к основанию с температурой T_0. Пусть начало координат совпадает с основанием цилиндра с температурой $T_0 + \Delta T$. Задачу решайте приближённо, пренебрегая всеми слагаемыми, пропорциональными квадрату малого параметра $\delta T = \frac{\Delta T}{T}$ и его старшим степеням. Можно использовать приближённую формулу $(1+x)^n \approx 1+nx$, справедливую при малых x ($|x| \ll 1$).

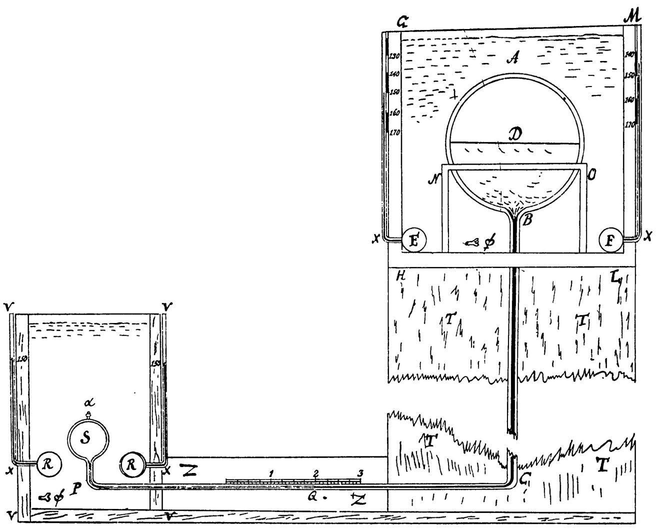
3a. (*4 балла*) Определите зависимость плотности газа в цилиндре от координаты $\rho(x)$.

3b. (*5 баллов*) Найдите смещение тележки d относительно начального положения.

Продолжение задания см. на листе 2

4. Барометр Ломоносова (8 баллов)

Для измерения небольших изменений ускорения свободного падения δg (обусловленных, например, изменением высоты над уровнем моря или притяжением Луны) Михаил Васильевич Ломоносов предложил создать прибор (*универсальный барометр*), конструкцию которого описал так: «Возьмём стеклянный шар AB с толстыми стенками и внутренним диаметром в три дюйма; соединим с ним барометрическую трубку BC такой длины, чтобы от центра шара до изгиба C было 28 дюймов; после загиба пусть идёт горизонтальная трубочка CP длиною в фут или больше со стеклянным шаром S диаметром в дюйм; просвет в трубочке CP пусть будет диаметром в $\frac{1}{4}$ линии». Схема, сопровождавшая описание, приводится ниже (увеличенный рисунок см. на листе 3).



Предполагалось, что в прибор заливается ртуть так, чтобы при вертикальном положении трубки BC бóльший шар был заполнен наполовину (при этом над ртутью не оставалось воздуха), а трубка PC была заполнена до точки Q (середина PC). После этого малый шар герметизировался, оба шара размещались в специальных ящиках, заполненных тающим льдом. Ожидалось, что изменение ускорения свободного падения можно будет обнаружить по изменению положения границы столба ртути в горизонтальной трубке, которое фиксировалось линейкой, расположенной рядом с трубкой. Прибор не был изготовлен, вероятно заявка Ломоносова была отклонена.

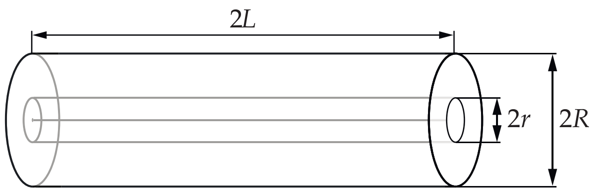
4a. (*4 балла*) Пусть расстояние между соседними делениями шкалы линейки составляет 1 линию. Какое минимальное относительное изменение $\frac{\delta g}{g}$ ускорения свободного падения можно было бы обнаружить при помощи универсального барометра?

1 фут $=$ 12 дюймов, 1 дюйм $=$ 10 линий, 1 дюйм $=$ $=$ 2,54 см. Плотность ртути и давление её насыщенных паров при 0 °C равны 13,6 г/см^3 и 0,25 кПа соответственно.

4b. (*4 балла*) На какой минимальной высоте над уровнем моря можно было бы измерить изменение ускорения свободного падения при помощи описанного прибора с относительной погрешностью не больше, чем 20%? Считайте, что погрешность определяется только погрешностью считывания линейки, радиус Земли равен 6400 км.

5. Кольцо и стержень (6 баллов)

В однородном диэлектрическом цилиндре длиной $2L$ и диаметром $2R$ сделан цилиндрический канал малого радиуса r ($r \ll R$), соосный цилиндру (см. рисунок, представленный ниже).



В канал вставлен однородно заряженный стержень длиной $2L$ круглого сечения, диаметр стержня чуть меньше диаметра канала. Стержень может двигаться свободно вдоль оси канала. На цилиндре закреплено тонкое однородно заряженное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра и делит цилиндр пополам. Кольцо и стержень на рисунке не изображены. Масса цилиндра с кольцом равна массе стержня и равна M. Стержень и кольцо несут одинаковые заряды разных знаков, равные по абсолютной величине q. Стержень смещают на небольшое расстояние x_0 ($x_0 \ll L$) от положения равновесия и отпускают.

5a. (*4 балла*) Чему равна максимальная скорость стержня, если цилиндр закреплён?

5b. (*2 балла*) Чему равна максимальная скорость стержня после освобождения системы, если цилиндр не удерживается внешней силой?

Гравитацией, всеми видами трения, а также эффектами, связанными с поляризацией диэлектрика, можно пренебречь.

Рисунок к задаче 4