

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

11 класс

Вариант 1

Задача 1

Навигационный спутник с массой $m = 100$ кг движется вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h = 400$ км над поверхностью. В какой-то момент из-за столкновения со скоплением космического мусора вектор скорости спутника поворачивается на угол $\alpha = 0,001$ рад в плоскости перпендикулярной направлению на центр Земли. При этом работоспособность спутника сохраняется.

1. Найдите период обращения спутника. Радиус Земли считать равным 6400 км, ускорение свободного падения 10 м/с^2 .
2. Считая, что антенны спутника позволяют передавать и принимать сигнал на Землю в направлениях, составляющих угол не более чем $\chi = 30^\circ$ к вертикали, оцените площадь поверхности, на которой возможен прием сигнала спутника в конкретный момент времени.
3. Оцените приблизительно площадь полосы поверхности Земли, в которой возможен прием сигнала спутника в разные моменты периода его обращения.
4. Оцените в течение какого максимального промежутка времени возможен прием сигнала спутника в точке, находящейся под орбитой спутника в течение одного пролета спутника.
5. Для того, чтобы вернуть вектору скорости прежнее направление спутника после столкновения было решено использовать ионный двигатель. Двигатель выпускает ионы ксенона со скоростью равной 120 км/с. Определите минимальную массу ксенона, которую нужно использовать для этого маневра.

Возможное решение

Дано:

$$R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$h = 0,4 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$\alpha = 0,001$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$m = 100 \text{ кг}$$

Решение:

$$1) F = ma; \quad G \frac{M_3 m}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{(R+h)} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_3}{R+h}} = \sqrt{g \frac{R^2}{R+h}}$$

$$T = 2\pi \frac{R+h}{v} = 2\pi \frac{(R+h)^{\frac{3}{2}}}{R\sqrt{g}} = 2\pi \frac{(6,4 \cdot 10^6 + 0,4 \cdot 10^6)^{\frac{3}{2}}}{6,4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{10}} = 5495 \text{ с}$$

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

$\chi = 30^\circ$ $u = 1,2 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ <i>Найти:</i> 1) $T - ?$ 2) $S_n - ?$ 3) $S_k - ?$ 4) $\tau - ?$ 5) $\Delta m - ?$	2) $r = htg\chi$; $S_k = \pi r^2 = \pi h^2 tg^2 \chi = \frac{\pi(4 \cdot 10^5)^2}{3} = 16,7 \cdot 10^{10} \text{ м}^2$ 3) Ширина полосы: $a = 2htg\chi$ Длина полосы: $b = 2\pi R$ $S_n = ab = 4\pi hRtg\chi = 4\pi * 4 * 10^5 * 64 * 10^5 * tg30 = 18,6 * 10^{12} \text{ м}^2$ 4) Пусть точка расположена на середине полосы. Тень спутника скользит по Земле со скоростью $v = \frac{2\pi R}{T}$. Радиус пятна: $r = htg\chi$. $\tau = \frac{2r}{v} = \frac{hTtg\chi}{\pi R} = \frac{4 * 10^5 * 5495 * tg30}{\pi * 64 * 10^5} = 63,1 \text{ с}$ 5) $\alpha = \frac{\Delta mu}{mv}$; $v = 2\pi \frac{R+h}{T}$ $\Delta m = \frac{cmv}{u} = \frac{2\pi cm(R+h)}{uT} = \frac{2\pi * 0,001 * 100 * (64 * 10^5 + 4 * 10^5)}{1,2 * 10^5 * 5495} = 6,48 \text{ г}$
--	---

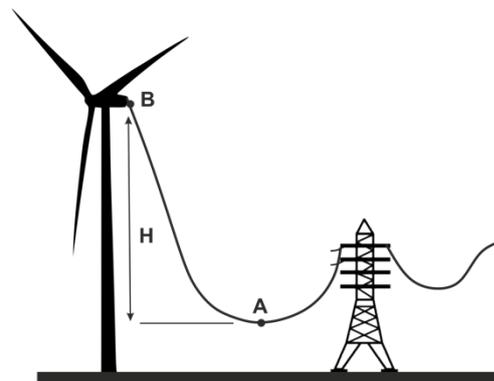
Критерии оценивания

1. Найден период обращения спутника T – 30 баллов
2. Оценена площадь поверхности S_n – 30 баллов
3. Оценена площадь полосы поверхности S_k – 30 баллов
4. Оценено максимальное время приема сигнала τ – 30 баллов
5. Определена масса ксенона – 30 баллов

Задача 2

В арктических широтах, особенно вблизи моря, обледенение опасно для воздушных линий электропередач, поскольку намерзание льда может приводить к обрыву проводов. Рассмотрим один из проводов, соединяющих ветрогенератор с опорой ЛЭП (см. рис.).

Длина участка АВ составляет 120 м, а разность высот точек А и В равна $H = 100$ м. Провод изготовлен из сплетения алюминиевых и стальных жил (алюминий для электропроводности, сталь для прочности), которые имеют суммарные площади сечения – 400 мм^2 и 64 мм^2 соответственно. Провод представляет собой цилиндрический трос с радиусом 14 мм. Прочность алюминия на разрыв составляет 80 МПа, стали – 800 МПа. Плотности $\rho_a = 2700 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_c = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\rho_n = 900 \text{ кг/м}^3$ ускорение свободного падения 10 м/с^2 .



1. Рассчитайте массу одного метра такого провода.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

2. Рассчитайте силу, необходимую для разрыва провода.
3. В какой точке сила натяжения провода максимальна?
4. Какова максимальная сила натяжения провода?
5. В неблагоприятных условиях провод покрывается равномерным слоем льда. В условиях мокрого снега и тумана толщина этого слоя может значительно превосходить диаметр провода. Определите допустимую толщину этого слоя льда. При этом с учетом сложности ремонта и воздействия других факторов (ветер, колебания), требуется, чтобы запас прочности был двадцатикратным.

Примечание: намерзший лед не повышает прочность провода на разрыв, а только увеличивает его массу.

Возможное решение

Дано:

$$\begin{aligned}l_{AB} &= 120 \text{ м} \\ H &= 100 \text{ м} \\ s_a &= 400 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \\ s_c &= 64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \\ r &= 0,014 \text{ м} \\ P_a &= 8 \cdot 10^7 \text{ Па} \\ P_c &= 8 \cdot 10^8 \text{ Па} \\ g &= 10 \text{ м/с}^2 \\ \rho_a &= 2700 \text{ кг/м}^3 \\ \rho_c &= 7800 \text{ кг/м}^3 \\ \rho_l &= 900 \text{ кг/м}^3 \\ n &= 20\end{aligned}$$

Найти:

- 1) m_1 – ?
- 2) F – ?
- 3)-4) T_{max} – ?
- 5) l_l – ?

Решение:

- 1) $m_1 = l(\rho_a s_a + \rho_c s_c) = 1 * (2700 * 400 * 10^{-6} + 7800 * 64 * 10^{-6}) = 1,58 \text{ кг}$
- 2) $F = P_a s_a + P_c s_c = 8 * 10^7 * 400 * 10^{-6} + 8 * 10^8 * 64 * 10^{-6} = 83 \text{ кН}$
- 3) Сила максимальна в точке В.
- 4) Переместим участок АВ на Δl вдоль провода вверх. Пусть m – масса всего провода, а L – длина всего провода. Работа сил:

$$T_B \Delta l - T_A \Delta l = \frac{\Delta l}{L} mgH \Rightarrow T_B - T_A = \frac{mgH}{L}$$

Условие равновесия участка АВ:

$$\begin{aligned}T_A^2 + \left(\frac{l_{AB} mg}{L}\right)^2 &= T_B^2 \Rightarrow \left(T_B - \frac{mgH}{L}\right)^2 + \left(\frac{l_{AB} mg}{L}\right)^2 = T_B^2 \\ T_{max} = T_B &= \frac{mg}{2} \cdot \frac{H^2 + l_{AB}^2}{LH} = \frac{m_1 L g}{2} \cdot \frac{H^2 + l_{AB}^2}{LH} = \frac{m_1 g}{2} \cdot \frac{H^2 + l_{AB}^2}{H} = \\ &= \frac{1,58 * 10}{2} \cdot \frac{100^2 + 120^2}{100} = 1,93 \text{ кН}\end{aligned}$$

- 5) С учетом запаса прочности: $F_{max} = \frac{F}{n} = \frac{83 * 10^3}{20} = 4,15 \text{ кН}$

Определим массу одного метра обмерзшего провода:

$$m'_1 = \frac{F_{max}}{T_{max}} \cdot m_1 = \frac{4,15 * 10^3}{1,93 * 10^3} * 1,58 = 3,40 \text{ кг}$$

На лед приходится: $m_l = m'_1 - m_1 = 3,40 - 1,58 = 1,82 \text{ кг}$

$$s_l = \pi(r + l_l)^2 - \pi r^2 = \pi(l_l^2 + 2l_l r)$$

$$m_l = s_l \rho_l \Rightarrow s_l = \frac{m_l}{\rho_l} = \frac{1,82}{1 * 900} = 0,002 \text{ м}^2$$

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

$$l_n^2 + 2rl_n - \frac{S_l}{\pi} = 0$$
$$D = 4r^2 + \frac{4S_l}{\pi}$$
$$l_n = -r + \sqrt{r^2 + \frac{S_l}{\pi}} = -0,014 + \sqrt{0,014^2 + \frac{0,002}{\pi}} = 0,015 \text{ м} = 1,5 \text{ см}$$

Критерии оценивания

1. Определена масса одного метра провода m_l – 30 баллов
2. Определена сила разрыва провода F – 30 баллов
3. Правильно указана точка с максимальной силой натяжения провода – 30 баллов
4. Определена сила максимального натяжения провода T_{max} – 30 баллов
5. Определена допустимая толщина слоя льда l_n – 30 баллов

Задача 3

Арктическая станция состоит из трех жилых модулей, расположенных на прямоугольной льдине с размерами $a = 400$ м на $b = 200$ м. Центр системы координат находится в центре льдины, ось X параллельна длинной стороне, ось Y параллельна короткой стороне льдины. В ближайшее время на льдину хотят установить еще один жилой модуль (последний).

Напишите программу, которая определит координаты точки установки четвертого модуля, при которых центр масс всех четырех модулей будет находиться в центре льдины (не возникнет крен льдины), а также общую длину провода, необходимого для соединения четвертого модуля с каждым жилым модулем, уже находящимся на льдине. По соображениям безопасности четвертый модуль не должен находиться на расстоянии, меньше, чем 50 м от края льдины. Все величины задаются в системе СИ. Считайте, что льдина имеет плоские верхнюю и нижнюю поверхности, а ее толщина везде одинакова. Перед кодом программы обязательно опишите алгоритм и приведите вывод используемых формул для нахождения искомых величин.

Входные данные:

- 1) координата x_1 , координата y_1 , масса m_1 первого модуля;
- 2) координата x_2 , координата y_2 , масса m_2 второго модуля;
- 3) координата x_3 , координата y_3 , масса m_3 третьего модуля;
- 4) масса m_4 четвертого модуля.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

Выходные данные:

- 1) координата x_4 , координата y_4 четвертого модуля (выводятся только если такое положение возможно).
- 2) длина провода L .

Возможное решение

Дано:

$$a = 400 \text{ м}$$

$$b = 200 \text{ м}$$

$$d = 50 \text{ м}$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

$$m_1, m_2, m_3, m_4$$

Найти:

1) (x_4, y_4) – ?

2) L – ?

Решение:

1) Чтобы при установке четвертого жилого модуля не возникал крен льдины, необходимо чтобы сумма моментов сил тяжести всех модулей относительно оси, проходящей через центр масс льдины, была равно 0:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0$$

$$m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + m_4 g x_4 = 0$$

$$x_4 = - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_4}$$

$$y_4 = - \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_4}$$

Проверка условия безопасности: $|x_4| \leq \left(\frac{a}{2} - d\right)$; $|y_4| \leq \left(\frac{b}{2} - d\right)$.

2) $L = L_{41} + L_{42} + L_{43}$

$$L_{41} = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$L_{42} = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}$$

$$L_{43} = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

Реализация нахождения искомых величин на языке C++

```
1 #include <iostream>
2 #include <cmath>
3 using namespace std;
4
5 double length(double x1, double y1, double x2, double y2)
6 {
7     return sqrt((x2 - x1) * (x2 - x1) + (y2 - y1) * (y2 - y1));
8 }
9
10 int main() {
11     double a=400, b=200, d=50;
12     double x1, y1, x2, y2, x3, y3, m1, m2, m3, m4;
13     cout << "(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3):";
14     cin >> x1 >> y1 >> x2 >> y2 >> x3 >> y3;
15     cout << "m1, m2, m3, m4:";
16     cin >> m1 >> m2 >> m3 >> m4;
17     double x4, y4, L;
18     x4 = - (x1 * m1 + x2 * m2 + x3 * m3) / m4;
19     y4 = - (y1 * m1 + y2 * m2 + y3 * m3) / m4;
```

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап

профиль «Арктика»

Междисциплинарные задачи

```
20     if ((abs(x4) <= (a/2-d)) and (abs(y4) <= (b/2-d)))
21     {
22     L = length( x4, y4, x1, y1 ) + length( x4, y4, x2, y2 ) + length( x4,
23 y4, x3, y3);
24     cout << "(" << x4 << ", " << y4 << ")" << endl << "L=" << L;
25     }
26     else
27     {
28     cout << "no solution";
29     }
30
31     return 0;
32 }
```

Критерии оценивания

1. Получены координаты (x_4, y_4) – 40 баллов
2. Найдена длина провода L – 40 баллов
3. Выполнена проверка условия безопасности – 20 баллов
4. Реализация программы – 50 баллов
5. Синтаксические ошибки до -5 баллов за каждую

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

Вариант 2

Задача 1

Навигационный спутник с массой $m = 150$ кг движется вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h = 300$ км над поверхностью. В какой-то момент из-за столкновения со скоплением космического мусора вектор скорости спутника поворачивается на угол $\alpha = 0,005$ рад в плоскости перпендикулярной направлению на центр Земли. При этом работоспособность спутника сохраняется.

1. Найдите период обращения спутника. Радиус Земли считать равным 6400 км, ускорение свободного падения 10 м/с^2 .
2. Считая, что антенны спутника позволяют передавать и принимать сигнал на Землю в направлениях, составляющих угол не более чем $\chi = 45^\circ$ к вертикали, оцените площадь поверхности, на которой возможен прием сигнала спутника в конкретный момент времени.
3. Оцените приблизительно площадь полосы поверхности Земли, в которой возможен прием сигнала спутника в разные моменты периода его обращения.
4. Оцените в течение какого максимального промежутка времени возможен прием сигнала спутника в точке, находящейся под орбитой спутника в течение одного пролета спутника.
5. Для того, чтобы вернуть вектору скорости прежнее направление спутника после столкновения было решено использовать ионный двигатель. Двигатель выпускает ионы криптона со скоростью равной 100 км/с . Определите минимальную массу криптона, которую нужно использовать для этого маневра.

Возможное решение

Дано:

$$R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$h = 0,3 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$\alpha = 0,005$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$m = 150 \text{ кг}$$

$$\chi = 45^\circ$$

$$u = 10^5 \text{ м/с}$$

Найти:

Решение:

$$1) F = ma; \quad G \frac{M_3 m}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{(R+h)} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_3}{R+h}} = \sqrt{g \frac{R^2}{R+h}}$$

$$T = 2\pi \frac{R+h}{v} = 2\pi \frac{(R+h)^{\frac{3}{2}}}{R\sqrt{g}} = 2\pi \frac{(6,4 \cdot 10^6 + 0,3 \cdot 10^6)^{\frac{3}{2}}}{6,4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{10}} = 5396 \text{ с}$$

$$2) r = htg\chi; \quad S_k = \pi r^2 = \pi h^2 tg^2 \chi = \pi (3 \cdot 10^5)^2 = 28,3 \cdot 10^{10} \text{ м}^2$$

$$3) \text{ Ширина полосы: } a = 2htg\chi$$

$$\text{Длина полосы: } b = 2\pi R$$

$$S_{\Pi} = ab = 4\pi h R tg\chi = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 64 \cdot 10^5 = 24,1 \cdot 10^{12} \text{ м}^2$$

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

<p>1) $T - ?$ 2) $S_n - ?$ 3) $S_k - ?$ 4) $\tau - ?$ 5) $\Delta m - ?$</p>	<p>4) Пусть точка расположена на середине полосы. Тень спутника скользит по Земле со скоростью $v = \frac{2\pi R}{T}$. Радиус пятна: $r = htg\chi$.</p> $\tau = \frac{2r}{v} = \frac{hTtg\chi}{\pi R} = \frac{3 * 10^5 * 5396}{\pi * 64 * 10^5} = 80,6 \text{ с}$ <p>5) $\alpha = \frac{\Delta mu}{mv}$; $v = 2\pi \frac{R+h}{T}$</p> $\Delta m = \frac{cmv}{u} = \frac{2\pi cm(R+h)}{uT} = \frac{2\pi * 0,005 * 150 * (64 * 10^5 + 3 * 10^5)}{10^5 * 5396} = 58,5 \text{ г}$
--	---

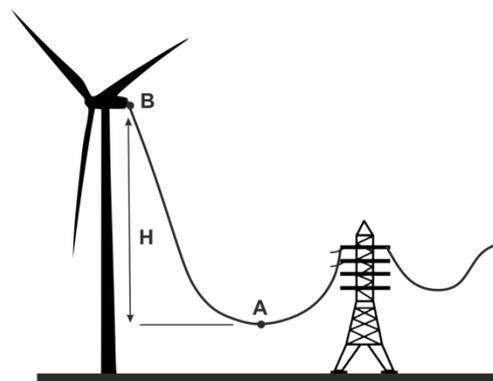
Критерии оценивания

1. Найден период обращения спутника T – 30 баллов
2. Оценена площадь поверхности S_n – 30 баллов
3. Оценена площадь полосы поверхности S_k – 30 баллов
4. Оценено максимальное время приема сигнала τ – 30 баллов
5. Определена масса ксенона – 30 баллов

Задача 2

В арктических широтах, особенно вблизи моря, обледенение опасно для воздушных линий электропередач, поскольку намерзание льда может приводить к обрыву проводов. Рассмотрим один из проводов, соединяющих ветрогенератор с опорой ЛЭП (см. рис.).

Длина участка АВ составляет 100 м, а разность высот точек А и В равна $H = 80$ м. Провод изготовлен из сплетения алюминиевых и стальных жил (алюминий для электропроводности, сталь для прочности), которые имеют суммарные площади сечения – 200 мм² и 50 мм² соответственно. Провод представляет собой цилиндрический трос с радиусом 10 мм.



Прочность алюминия на разрыв составляет 80 МПа, стали – 800 МПа. Плотности $\rho_a = 2700$ кг/м³ и $\rho_c = 7800$ кг/м³, $\rho_n = 900$ кг/м³ ускорение свободного падения 10 м/с².

1. Рассчитайте массу одного метра такого провода.
2. Рассчитайте силу, необходимую для разрыва провода.
3. В какой точке сила натяжения провода максимальна?
4. Какова максимальная сила натяжения провода?

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль «Арктика»

Междисциплинарные задачи

5. В неблагоприятных условиях провод покрывается равномерным слоем льда. В условиях мокрого снега и тумана толщина этого слоя может значительно превосходить диаметр провода. Определите допустимую толщину этого слоя льда. При этом с учетом сложности ремонта и воздействия других факторов (ветер, колебания), требуется, чтобы запас прочности был двадцатикратным.

Примечание: намерзший лед не повышает прочность провода на разрыв, а только увеличивает его массу.

Возможное решение

Дано:

$$l_{AB} = 100 \text{ м}$$

$$H = 80 \text{ м}$$

$$s_a = 200 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$s_c = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$r = 0,01 \text{ м}$$

$$P_a = 8 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$P_c = 8 \cdot 10^8 \text{ Па}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$\rho_a = 2700 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_c = 7800 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$$

$$n = 20$$

Найти:

1) $m_1 - ?$

2) $F - ?$

3)-4) $T_{max} - ?$

5) $l_l - ?$

Решение:

1) $m_1 = l(\rho_a s_a + \rho_c s_c) = 1 * (2700 * 200 * 10^{-6} + 7800 * 50 * 10^{-6}) = 0,93 \text{ кг}$

2) $F = P_a s_a + P_c s_c = 8 * 10^7 * 200 * 10^{-6} + 8 * 10^8 * 50 * 10^{-6} = 56 \text{ кН}$

3) Сила максимальна в точке В.

4) Переместим участок АВ на Δl вдоль провода вверх. Пусть m – масса всего провода, а L – длина всего провода. Работа сил:

$$T_B \Delta l - T_A \Delta l = \frac{\Delta l}{L} mgH \Rightarrow T_B - T_A = \frac{mgH}{L}$$

Условие равновесия участка АВ:

$$T_A^2 + \left(\frac{l_{AB} mg}{L}\right)^2 = T_B^2 \Rightarrow \left(T_B - \frac{mgH}{L}\right)^2 + \left(\frac{l_{AB} mg}{L}\right)^2 = T_B^2$$

$$T_{max} = T_B = \frac{mg}{2} \cdot \frac{H^2 + l_{AB}^2}{LH} = \frac{m_1 L g}{2} \cdot \frac{H^2 + l_{AB}^2}{LH} = \frac{m_1 g}{2} \cdot \frac{H^2 + l_{AB}^2}{H} =$$
$$= \frac{0,93 * 10}{2} \cdot \frac{80^2 + 100^2}{80} = 0,95 \text{ кН}$$

5) С учетом запаса прочности: $F_{max} = \frac{F}{n} = \frac{56 * 10^3}{20} = 2,8 \text{ кН}$

Определим массу одного метра обмерзшего провода:

$$m'_1 = \frac{F_{max}}{T_{max}} \cdot m_1 = \frac{2,8 * 10^3}{0,95 * 10^3} * 0,93 = 2,74 \text{ кг}$$

На лед приходится: $m_l = m'_1 - m_1 = 2,74 - 0,93 = 1,81 \text{ кг}$

$$s_l = \pi(r + l_l)^2 - \pi r^2 = \pi(l_l^2 + 2l_l r)$$

$$m_l = s_l \rho_l \Rightarrow s_l = \frac{m_l}{\rho_l} = \frac{1,81}{1 * 900} = 0,002 \text{ м}^2$$

$$l_l^2 + 2r l_l - \frac{s_l}{\pi} = 0$$

$$D = 4r^2 + \frac{4s_l}{\pi}$$

$$l_l = -r + \sqrt{r^2 + \frac{s_l}{\pi}} = -0,01 + \sqrt{0,01^2 + \frac{0,002}{\pi}} = 0,017 \text{ м} = 1,7 \text{ см}$$

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

Критерии оценивания

1. Определена масса одного метра провода m_l – 30 баллов
2. Определена сила разрыва провода F – 30 баллов
3. Правильно указана точка с максимальной силой натяжения провода – 30 баллов
4. Определена сила максимального натяжения провода T_{max} – 30 баллов
5. Определена допустимая толщина слоя льда l_l – 30 баллов

Задача 3

Арктическая станция состоит из трех жилых модулей, расположенных на прямоугольной льдине с размерами $a = 600$ м на $b = 400$ м. Центр системы координат находится в центре льдины, ось X параллельна длинной стороне, ось Y параллельна короткой стороне льдины. В ближайшее время на льдину хотят установить еще один жилой модуль (последний).

Напишите программу, которая определит координаты точки установки четвертого модуля, при которых центр масс всех четырех модулей будет находиться в центре льдины (не возникнет крен льдины), а также общую длину провода, необходимого для соединения четвертого модуля с каждым жилым модулем, уже находящимся на льдине. По соображениям безопасности четвертый модуль не должен находиться на расстоянии, меньше, чем 100 м от края льдины. Все величины задаются в системе СИ. Считайте, что льдина имеет плоские верхнюю и нижнюю поверхности, а ее толщина везде одинакова. Перед кодом программы обязательно опишите алгоритм и приведите вывод используемых формул для нахождения искомых величин.

Входные данные:

- 1) координата x_1 , координата y_1 , масса m_1 первого модуля;
- 2) координата x_2 , координата y_2 , масса m_2 второго модуля;
- 3) координата x_3 , координата y_3 , масса m_3 третьего модуля;
- 4) масса m_4 четвертого модуля.

Выходные данные:

- 1) координата x_4 , координата y_4 четвертого модуля (выводятся только если такое положение возможно).
- 2) длина провода L .

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

Возможное решение

Дано:

$$a = 600 \text{ м}$$

$$b = 400 \text{ м}$$

$$d = 100 \text{ м}$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

$$m_1, m_2, m_3, m_4$$

Найти:

1) $(x_4, y_4) - ?$

2) $L - ?$

Решение:

Чтобы при установке четвертого жилого модуля не возникал крен льдины, необходимо чтобы сумма моментов сил тяжести всех модулей относительно оси, проходящей через центр масс льдины, была равно 0:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0$$

$$m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + m_4 g x_4 = 0$$

$$x_4 = -\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_4}$$

$$y_4 = -\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_4}$$

Проверка условия безопасности: $|x_4| \leq \left(\frac{a}{2} - d\right)$; $|y_4| \leq \left(\frac{b}{2} - d\right)$.

$$2) L = L_{41} + L_{42} + L_{43}$$

$$L_{41} = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$L_{42} = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}$$

$$L_{43} = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

Реализация нахождения искомых величин на языке C++

```

1 #include <iostream>
2 #include <cmath>
3 using namespace std;
4
5 double length(double x1, double y1, double x2, double y2)
6 {
7     return sqrt((x2 - x1) * (x2 - x1) + (y2 - y1) * (y2 - y1));
8 }
9
10 int main() {
11     double a=600, b=400, d=100;
12     double x1, y1, x2, y2, x3, y3, m1, m2, m3, m4;
13     cout << "(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3) :";
14     cin >> x1 >> y1 >> x2 >> y2 >> x3 >> y3;
15     cout << "m1, m2, m3, m4 :";
16     cin >> m1 >> m2 >> m3 >> m4;
17     double x4, y4, L;
18     x4 = - (x1 * m1 + x2 * m2 + x3 * m3) / m4;
19     y4 = - (y1 * m1 + y2 * m2 + y3 * m3) / m4;
20     if ((abs(x4) <= (a/2-d)) and (abs(y4) <= (b/2-d)))
21     {
22         L = length(x4, y4, x1, y1) + length(x4, y4, x2, y2) + length(x4,
23 y4, x3, y3);
24         cout << "(" << x4 << ", " << y4 << ")" << endl << "L=" << L;
25     }
26     else
27     {
28         cout << "no solution";

```

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
профиль «Арктика»
Междисциплинарные задачи

29	}
30	
31	<code>return 0;</code>
32	}

Критерии оценивания

1. Получены координаты (x_4, y_4) – 40 баллов
2. Найдена длина провода L – 40 баллов
3. Выполнена проверка условия безопасности – 20 баллов
4. Реализация программы – 50 баллов
5. Синтаксические ошибки до -5 баллов за каждую