

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
9 класс**

Задание 1.1

Петя и Вася живут в разных подъездах одного дома, количество этажей в подъездах одинаковое, на каждом этаже 4 квартиры. Известно, что Петя живёт на четвёртом этаже в 79 квартире, а Вася живёт на втором этаже в 165 квартире. Сколько этажей в доме?

Ответ: 8 или 4

Решение: При решении задачи необходимо использовать частичный перебор. Очевидно, что Петя не может жить в первом подъезде, так как 4 квартиры на этаже, тогда при отсутствии подъездов 79 квартира – это 20й этаж, а 165 квартира – 42й, то есть 20 при делении на количество этажей дает в остатке 4, а 42 – в остатке 2, тогда 8 этажей.

Если же рассмотреть вариант, где 20 кратно 4, то есть остаток 0, то подходит и 4 этажа.

Задание 1.2

Петя и Вася живут в разных подъездах одного дома, количество этажей в подъездах одинаковое, на каждом этаже 4 квартиры. Известно, что Петя живёт на четвёртом этаже в 77 квартире, а Вася живёт на втором этаже в 167 квартире. Сколько этажей в доме? Количество этажей больше 5, но меньше 15.

Ответ: 8 или 4

Решение: При решении задачи необходимо использовать частичный перебор. Очевидно, что Петя не может жить в первом подъезде, так как 4 квартиры на этаже, тогда при отсутствии подъездов 77 квартира – это 20й этаж, а 167 квартира – 42й, то есть 20 при делении на количество этажей дает в остатке 4, а 42 – в остатке 2, тогда 8 этажей.

Задание 2.1

Найдите квадрат наименьшего значения выражения: $\frac{x^2-3}{x^2+1}$

Ответ: 9

Решение:

$\frac{x^2-3}{x^2+1} = \frac{x^2+1-4}{x^2+1} = 1 - \frac{4}{x^2+1}$. Значение дроби $\frac{4}{x^2+1} > 0$, поэтому минимальное значение выражения будет -3 при $x = 0$. Квадрат значения равен 9.

Задание 2.2

Найдите квадрат наименьшего значения выражения: $\frac{x^2-2}{x^2+1}$

Ответ: 4

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
9 класс**

Решение: $\frac{x^2-2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-3}{x^2+1} = 1 - \frac{3}{x^2+1}$. Значение дроби $\frac{3}{x^2+1} > 0$, поэтому минимальное значение выражения будет -2 при $x = 0$. Квадрат значения равен 4 .

Задание 3.1

Ученики 10 «А» зашли в класс, они увидели, что на доске написано задача: дано число $3^{2003} + 7^{2003}$, найдите наибольшую степень двойки, которой кратно число. В ответ запишите значение степени. Помогите ученикам 10 «А» найти ответ.

Ответ: 1

Решение:

Необходимо применить формулу:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - \dots + b^{n-1})$$

Тогда

$$3^{2003} + 7^{2003} = (3 + 7)(3^{2002} - \dots + 7^{2002})$$

В первой скобке сумма чисел равна 10, а во второй скобке нечетное число, поэтому 2^1 является делителем, то есть первая степень.

Задание 3.2

Ученики 10 «А» зашли в класс и увидели, что на доске написано задача: дано число $3^{2003} + 5^{2003}$, найдите наибольшую степень двойки, которой кратно число. В ответ запишите значение степени. Помогите ученикам 10 «А» найти ответ.

Ответ: 3

Решение:

Необходимо применить формулу:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - \dots + b^{n-1})$$

Тогда

$$3^{2003} + 5^{2003} = (3 + 5)(3^{2002} - \dots + 5^{2002})$$

В первой скобке сумма чисел равна 8, а во второй скобке нечетное число, поэтому 2^3 является делителем, то есть третья степень.

Задание 4.1

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали, которые пересекаются в точке O . Известно, что $SAOB=2$, $SBOC=4$, $SCOD=6$. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 15

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
9 класс**

Решение: Обозначим площади треугольников, которые получились в результате пересечения диагоналей S_1, S_2, S_3, S_4 . По свойству выпуклых четырехугольников $S_1 * S_3 = S_2 * S_4$, при условии, что S_1 и S_3, S_2 и S_4 – противоположные. Тогда площадь четвертого треугольника $2 * 6 / 4 = 3$, а площадь четырехугольника $2 + 4 + 6 + 3 = 15$.

Задание 4.2

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали, которые пересекаются в точке O . Известно, что $SAOB=3, SBOC=2, SCOD=6$. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 20

Решение: Обозначим площади треугольников, которые получились в результате пересечения диагоналей S_1, S_2, S_3, S_4 . По свойству выпуклых четырехугольников $S_1 * S_3 = S_2 * S_4$, при условии, что S_1 и S_3, S_2 и S_4 – противоположные. Тогда площадь четвертого треугольника $3 * 6 / 2 = 9$, а площадь четырехугольника $3 + 2 + 6 + 9 = 20$.

Задание 5.1

Трёхзначное число будем называть уникальным, если оно меньше всех других натуральных чисел с такой же суммой цифр. Сколько существует уникальных трёхзначных чисел?

Ответ: 9

Решение: У трёхзначного числа сумма цифр принимает значения от 1 до 27. Все числа, сумма цифр которых меньше 19, не могут быть уникальными, так как есть двузначные числа с такой суммой чисел, то есть остаются числа, сумма цифр которых принимает значения от 19 до 27. Всего таких чисел 9, так как для каждой суммы находим минимальное трёхзначное число.

Задание 5.2

Трёхзначное число будем называть уникальным, если оно меньше всех других натуральных чисел с такой же суммой цифр. В ответ запишите наименьшее уникальное трёхзначное число.

Ответ: 199

Решение: У трёхзначного числа сумма цифр принимает значения от 1 до 27. Все числа, сумма цифр которых меньше 19, не могут быть уникальными, так как есть двузначные числа с такой суммой чисел, то есть остаются числа, сумма цифр которых принимает значения от 19

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
9 класс**

до 27. Самое маленькое трехзначное число, сумма цифр которого равна 19 – это 199, так как первая цифра – это 1, а сумма двух других равна 18.

Задание 6.1

Решите систему уравнений натуральных числах:

$$\begin{cases} a + b + c = 33 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 363 \end{cases}$$

Ответ: 11,11,11

Решение: Необходимо первую строку в систему домножить на 22 и вычесть из второй строки. В результате получится сумма трех квадратов:

$$(a - 11)^2 + (b - 11)^2 + (c - 11)^2 = 0,$$

тогда $a = 11, b = 11, c = 11$.

Задание 6.2

Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} a + b + c = 39 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 507 \end{cases}$$

Ответ: 13, 13, 13

Решение:

Необходимо первую строку в систему домножить на 26 и вычесть из второй строки. В результате получится сумма трех квадратов:

$$(a - 13)^2 + (b - 13)^2 + (c - 13)^2 = 0,$$

тогда $a = 13, b = 13, c = 13$.