



**XVI олимпиада по теории вероятностей и статистике  
Пригласительный тур (очный). 18 ноября 2022 г.**

**Ответы к задачам 1 – 6**

№	Ответы к задачам варианта 1	Ответы к задачам варианта 2
1	23	18
2	Любое значение от 2600 до 2800 м	Любое значение от 2300 до 2500 м
3	См. раздел «Решения» ниже	См. раздел «Решения» ниже
4	4/7	8/9
5	0,625	0,25
6	7, 8, 9, 16, 25, 34 (см. критерии ниже)	1, 2, 3, 74, 85, 96 (см. критерии ниже)

**Решения задач первого варианта**

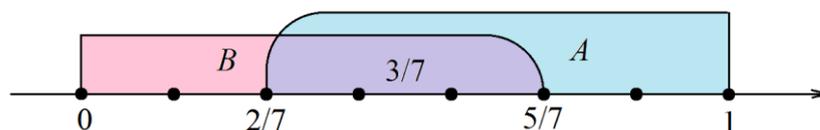
1. Пусть всего девушек  $x$ . Тогда у каждого юноши  $x$  однокурсниц, а у каждой девушки  $x-1$  однокурсниц. Число 22,425 находится между целыми числами  $x-1$  и  $x$ , поэтому  $x = 23$ .

2. Медианой является пятое по величине значение. Только на правой нижней диаграмме пятый по величине столбик примерно равен половине самого высокого. Значит, это верная диаграмма, и из нее читается ответ.

3. Например, на одном по два раза числа от 1 до 10, на другом — по два раза числа 0, 10, 20, ..., 90. Есть другие решения.

4. Событие «каша не слишком густая для Коли» имеет вероятность  $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ . Аналогично, вероятность события «каша не слишком жидкая для Вали» тоже равна  $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ . Эти события несовместны, а поэтому хотя бы одно из них выполняется с вероятностью  $\frac{4}{7}$ .

**Другое решение.** Густоту каши будем считать величиной на отрезке  $[0;1]$ . Изобразим события  $A$  «каша слишком густая для Коли» и  $B$  «каша слишком жидкая для Вали».



Событие  $A \cap B$  «каша не подходит никому» имеет вероятность

$$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} - 1 = \frac{3}{7}.$$

Значит, противоположное событие «кашу согласится есть хотя бы один» имеет вероятность  $4/7$ .

5. Коля пришел через 7 минут после Вали, а поэтому он пришел не раньше чем за 8 минут до появления продавца. Вероятность того, что ему придется ждать не более 5 минут, равна  $\frac{5}{8} = 0,625$ .

6. Наименьшая дисперсия будет тогда, когда числа теснее всего сгруппированы около своего среднего. Нужно сделать однозначные числа как можно больше, а двузначные – как можно меньше. Задача решается подбором.

Критерии оценивания	Балл
Дан набор 7, 8, 9, 16, 25, 34	3
Дан набор 7, 8, 9, 1*, 2*, 3*, где звездочками обозначены цифры 4, 5 и 6 в неправильном порядке	2
Двузначные числа начинаются цифрами 1, 2 и 3, но стандартное отклонение не наименьшее (например, дан набор 4, 5, 6, 17, 28, 39)	1
Другие случаи или отсутствие ответа	0

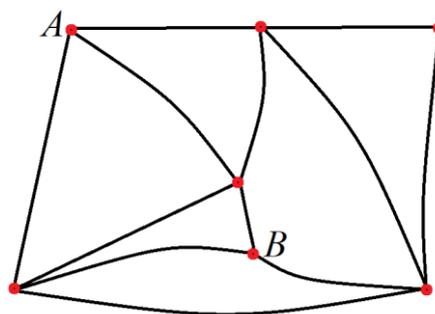


7. Если бы на двух противоположных гранях обитали лжец и рыцарь, то они утверждали бы разное, поскольку соседи у них общие. Значит, на двух любых противоположных гранях обитают либо два рыцаря, либо два лжеца. Рассмотрим грань, где живет Ланселот (верхнюю), и противоположную ему (нижнюю). Там живут рыцари. Остаются четыре боковые грани, причем рыцари и лжецы на них чередуются (см. рисунок). Таким образом, всего на Гексании четыре рыцаря и два лжеца.

**Ответ: 2 лжеца и 4 рыцаря.**

Критерии оценивания	Балл
Полное и обоснованное решение	2
Доказано, что на противоположных гранях живут либо два рыцаря, либо два лжеца	1
Дан только ответ или решение неверное	0

8. Предположим, что Ученый неправ и ребята смогут обойти дорожки так, как предложил Коля. Подграф, который обходит Коля, должен быть эйлеровым<sup>1</sup>, причем все вершины должны иметь четную степень. Подграф, который обходит Валя, тоже должен обладать этими свойствами. Объединение этих подграфов должно совпадать с графом всех дорожек, и получилось, что все вершины должны иметь четную степень. Но граф дорожек имеет вершины нечетной степени (A и B на рисунке). Противоречие.



Критерии оценивания	Балл
Полное и обоснованное решение	2
Дан только ответ или решение неверное	0

<sup>1</sup> Эйлеров граф содержит путь, проходящий по всем ребрам ровно по одному разу.

9. Если Коля выбирает правило 1, то он побеждает с вероятностью

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Если Коля выбирает правило 2, то у Вали на победу шансы выше чем  $1/2$ , поскольку начинает она. Строго это можно обосновать следующим образом. Пусть  $x$  – вероятность выигрыша Вали. Тогда

$$x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} x, \text{ откуда } x = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}.$$

Значит, Коле выгоднее выбрать правило 1.

Критерии оценивания	Балл
Полное и обоснованное решение	3
Верно найдена вероятность выигрыша Коли или Вали при одном из правил	2
Нет верного ответа	0

### Решения задач второго варианта<sup>2</sup>

2. Только на правой нижней диаграмме пятый по величине столбик (медиана) примерно в 2,5 раза выше, чем самый низкий. Значит, это верная диаграмма, и из нее читается ответ.

3. Например, на одном по два раза числа от 1 до 10, на другом — по четыре раза числа 0, 10, 20, 30 и 40. Есть другие решения.

6.

Критерии оценивания	Балл
Дан набор 1, 2, 3, 74, 85, 94	3
Дан набор 1, 2, 3, 7*, 8*, 9*, где звездочками обозначены цифры 4, 5 и 6 в неправильном порядке	2
Двузначные числа начинаются цифрами 7, 8 и 9, но стандартное отклонение не наибольшее (например, дан набор 4, 5, 6, 71, 82, 93)	1
Другие случаи или отсутствие ответа	0

7. Если бы на не соединенных мостами островах обитали лжец и рыцарь, то они утверждали бы разное, поскольку соседи у них общие. Значит, на двух любых островах, которые не соединены мостом, обитают либо два рыцаря, либо два лжеца. Рассмотрим остров, где живет Персиваль, и не связанный с ним остров. Там живут рыцари. Остаются четыре острова, причем рыцарей и лжецов на них поровну. Таким образом, всего на Новой Гексании обитают четыре рыцаря и два лжеца.

Критерии оценивания	Балл
Полное и обоснованное решение	2
Доказано, что на не соседних островах живут либо два рыцаря, либо два лжеца	1
Только ответ или решение неверно	0

<sup>2</sup> Решения задач, полностью аналогичные решению соответствующих задач первого варианта, отсутствуют.

8. Решение аналогично решению задачи 8 первого варианта. Граф содержит две вершины нечетной степени.

Критерии оценивания	Балл
Полное и обоснованное решение	2
Дан только ответ или решение неверное	0

9. Если Коля выбирает правило 1, то он побеждает с вероятностью

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

Пусть выбрано правило 2, и пусть  $x$  – вероятность выигрыша Вали при этом условии. Тогда

$$x = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} x, \text{ откуда } x = \frac{5}{9}.$$

Вероятность выигрыша Коли равна  $\frac{4}{9} > \frac{2}{5}$ . Значит, Коле выгоднее выбрать правило 2.

Критерии оценивания	Балл
Полное и обоснованное решение	3
Верно найдена вероятность выигрыша Коли или Вали при одном из правил	2
Нет верного ответа	0