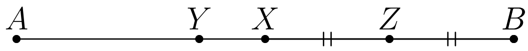
ММО-2024. 10 класс. Решения

1. Петя и Вася играют на отрезке $[0; 1]$, в котором отмечены точки 0 и 1. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый ход игрок отмечает ранее не отмеченную точку отрезка. Если после хода очередного игрока нашлись три последовательных отрезка между соседними отмеченными точками, из которых можно сложить треугольник, то сделавший такой ход игрок объявляется победителем, и игра заканчивается. Получится ли у Пети гарантированно победить?

(*Б. Бутырин*)

Ответ. Да, получится.

Решение. Первым ходом Петя отмечает середину отрезка AB — точку X. Пусть Вася сходил, без потери общности, в левый отрезок точкой Y. Образуются три отрезка, один из которых (а именно XB) равен сумме двух других, поэтому Вася не сможет выиграть на первом своём ходу, и игра продолжится. Далее Пете остаётся отметить середину правого отрезка Z.



Тогда отрезки YX, XZ и ZB образуют треугольник: в сумме XZ и ZB, как половина AB, больше YX, а неравенства $XZ < YX + ZB$ и $ZB < YX + XZ$ верны в силу равенства XZ и ZB.

2. Докажите, что среди вершин выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

(*А. Юран*)

Решение. Обозначим девятиугольник как $A_1A_2 \ldots A_9$. Рассмотрим четырёхугольники $A_2A_4A_6A_8$ и $A_1A_4A_6A_8$. Заметим, что оба прямоугольниками они быть не могут, так как он однозначно задаётся тремя точками. Значит, так как сумма углов в четырёхугольнике равна $360°$, один из них будет иметь тупой угол, который и даст нам искомый треугольник.

3. В клуб любителей гиперграфов в начале года записались n попарно незнакомых школьников. За год клуб провёл 100 заседаний, причём каждое заседание посетил хотя бы один школьник. Два школьника знакомились, если было хотя бы одно заседание, которое они оба посетили. В конце года оказалось, что количество знакомых у каждого школьника не меньше, чем количество заседаний, которые он посетил. Найдите минимальное значение n, при котором такое могло случиться.

(*Д. Метелев*)

Ответ: 11.

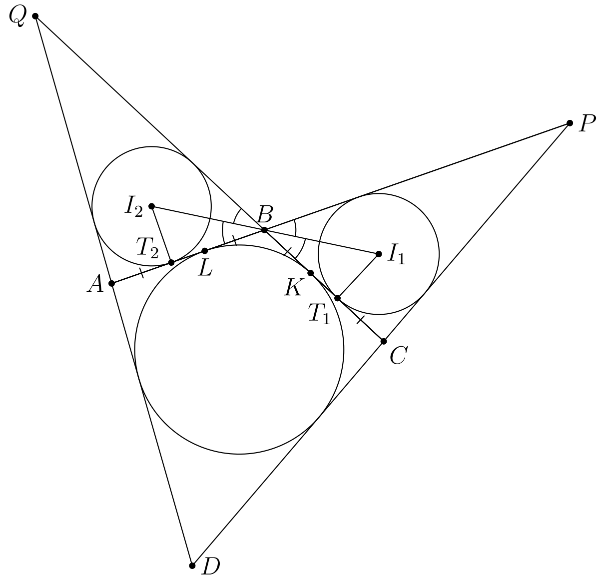
Решение. *Оценка.* Рассмотрим самого активного школьника, посетившего наибольшее количество заседаний, пусть их было k. Так как все заседания посетил хотя бы кто-то, то $nk \geqslant 100$. С другой стороны, по условию этот школьник познакомился с хотя бы k другими участниками клуба, значит, мы нашли уже хотя бы $k + 1 \geqslant \frac{100}{n} + 1$ школьника, хотя их всего n. Таким образом, $n \geqslant \frac{100}{n} + 1$, откуда $n \geqslant 11$.

Пример. Возьмём первое заседание, которое посетят все школьники, а остальные разобьём на 11 групп по 9 заседаний, их посетят по одному школьнику. Скажем, что школьник под номером i посетил заседания из i-ой группы вместе с самым первым (таким образом, каждый участник посетил 10 заседаний). Тогда каждый школьник познакомился с остальными десятью на самом первом заседании.

Замечание. Немного модернизируя оценку, можно показать более общий результат: для N заседаний наименьшее возможное число школьников при данных условиях равно $\lceil\sqrt{N}\rceil + 1$.

4. Дан описанный четырехугольник $ABCD$ с тупым углом ABC. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи DA и CB — в точке Q. Докажите, что $|AD-CD| \geqslant |r_1-r_2|$, где r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников PBC и QAB.

(Л. Шатунов)



Решение. Положим T_1 и T_2 — точки касания вписанных окружностей треугольников PBC и QAB со сторонами BC и AB соответственно, а K и L — точки касания вписанной окружности $ABCD$ со сторонами BC и AB соответственно (см. рис.)

По свойству описанного четырёхугольника $AB + CD = BC + AD$, поэтому $|AD - CD| = |AB - BC|$. Из треугольников BI_1T_1 и BI_2T_2 имеем, что $r_1 = BT_1 \cdot \operatorname{tg} \angle CBI_1$, а $r_2 = BT_2 \cdot \operatorname{tg} \angle CBI_1$, откуда

$$|r_1-r_2| = |BT_1-BT_2| \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle PBC}{2} \leqslant |BT_1-BT_2|,$$

так как $\angle PBC < 90°$. Заметим, что $BL = BK$ как отрезки касательных, а $BK = CT_1$, ведь T_1 и K — точки касания вписанной и вневписанной окружностей $\triangle PBC$ со стороной BC, аналогично $BL = AT_2$. Тогда $|BC - AB| = |BT_1 - BT_2 + CT_1 - AT_2| = |BT_1 - BT_2| \geqslant |r_1 - r_2|$.

5. Будем называть натуральное число N *сильно кубическим*, если существует такой приведённый кубический многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(f(N))) = 0$, а $f(N)$ и $f(f(N))$ не равны 0. Верно ли, что все числа, большие 20^{24}, сильно кубические?

(Д.Бродский)

Ответ. Нет, неверно.

Решение. Пусть $f(N) = y$, $f(f(N)) = z$. Для простоты перейдём к рассмотрению квадратного трёхчлена

$$g(x) = f(x) - (x - N)(x - y)(x - z),$$

для него также верно $g(N) = y$, $g(y) = z$, $g(z) = 0$, при этом его коэффициенты целые (скажем, $g(x) = ax^2 + bx + c$).

Заметим, что y и z различны и не совпадают с N, иначе мы бы получили противоречие с условием $N, y, z \neq 0$. Так как для натуральных n и $\alpha \neq \beta$ выполнено $\alpha^n - \beta^n \,\vdots\, \alpha - \beta$, то $g(\alpha) - g(\beta) \,\vdots\, \alpha - \beta$, поэтому имеют место следующие делимости:

$$\begin{cases} y - z \,\vdots\, N - y, \\ z - 0 \,\vdots\, y - z, \\ y - 0 \,\vdots\, N - z. \end{cases} \tag{1}$$

Прибавляя к левой части первой строчки $N - y$, получаем $N - z \,\vdots\, N - y$, что вкупе с третьей строкой даёт $y \,\vdots\, N - y$. Так как разности $N - y$ и $y - z$ тоже делятся на $N - y$, приходим к выводу, что $d = |N - y|$ является общим делителем N, y и z. Обозначим $N' = \frac{N}{d}$, $y' = \frac{y}{d}$, $z' = \frac{z}{d}$, для них верны делимости, аналогичные (1). Также заметим, что из $y = g(N) = aN^2 + bN + c$ следует делимость c на d (обозначим $c' = \frac{c}{d}$). Это наблюдение позволяет сократить числа на d в следующем смысле: введём многочлен $g'(x) = dax^2 + bx + c'$. Его коэффициенты целы, а

$$g'(N') = y', \quad g'(y') = z', \quad g'(z') = 0. \tag{2}$$

При этом N' не могло оказаться чётным: в таком случае y', как соседнее с N' число, будет нечётным. Тогда либо $z' \vdots 2$, и $y' \vdots N' - z' \vdots 2$, либо $z' \not\vdots 2$, и $z' \vdots y' - z' \vdots 2$, что в любом случае даёт противоречие. Это приводит к идее рассматривать в качестве N степень двойки.

Пусть $N = 2^k$. Тогда в силу написанного выше $N' = 1$, а $d = 2^k$. Так как $y' \neq 0$ и соседствует с N', то $y' = 2$, и тогда из $y' \vdots N' - z'$ следует, что $N' - z'$ по модулю равно либо 1, либо 2. Первый вариант не годится, так как иначе $z' = 2 = y'$ или $z' = 0$. Во втором случае $z' = -1$ или $z' = 3$, и с учётом $z' \vdots y' - z'$ подходит только $z' = 3$. Но такому набору N', y', z' соответствует единственный набор коэффициентов многочлена $g'(x)$, при котором выполнены равенства (2), так как парабола задаётся тремя точками. С другой стороны, его старший коэффициент обязан делится на d, которое может быть сколь угодно большим, и он ненулевой, так как три полученные точки не лежат на одной прямой. Таким образом, достаточно большие степени двойки не будут сильно кубическими, а значит, не все числа, большие 20^{24}, такие.

Другое решение. Пусть $f(N) = M$, $f(M) = K$ и $f(K) = 0$. Из теоремы Безу находим, что $f(t) = (t - K)g(t)$. Знаем, что $g(M) = \frac{K}{M-K} = a \in \mathbb{Z}$. Отсюда $M = \frac{(a+1)K}{a}$. Поскольку числа a и $a+1$ взаимно просты, число K делится на a, иными словами $K = ab$ для $b \in \mathbb{Z}$. Также знаем, что $g(N) = \frac{M}{N-K} = \frac{(a+1)b}{N-ab} = c \in \mathbb{Z}$. Отсюда

$$N = ab + \frac{(a+1)b}{c}. \tag{3}$$

Как известно, число $g(N) - g(M)$ делится на $N - M$, то есть число

$$\frac{g(N) - g(M)}{M - N} = \frac{c(a-c)}{b(a-c+1)} = d \tag{4}$$

является целым. Поскольку числа $a - c$ и $a - c + 1$ взаимно просты, число c делится на $a-c+1$, иными словами $c = (a-c+1)x$ для $x \in \mathbb{Z}$. Отсюда $c(x+1) = x(a+1)$, следовательно $a + 1$ делится на $x + 1$. Напишем $a + 1 = (x + 1)y$, где $y \in \mathbb{Z}$. Далее $N - M = b/x = z \in \mathbb{Z}$. Подставим в (4) и получим $y = dz + 1$.

И наконец, подставляя в (3), находим $N = z((x^2+x)(dz+1)+1)$, а также $K = xz((dz+1)(x+1)-1) \neq 0$ и $M = xz(x+1)(dz+1) \neq 0$. Существует бесконечно много натуральных чисел N, не представимых в таком виде, например, 2^k при $k > 1$.

Замечание. Можно показать, что любое число вида $z((x^2 + x)(dz + 1) + 1)$ является сильно кубическим, при условии что числа x, $x+1$, $dz+1$, z и $(dz+1)(x+1)-1$ не равны нулю.

6. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется неудачной, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

(А. Кушнир)

Ответ. 98!.

Решение. *Пример.* Возьмём одну карточку с иррациональным числом и 98 карточек с рациональными (например, $\sqrt{2}, 1, 2, \ldots, 98$). Тогда в неудачной стопке карточка с иррациональным числом должна быть сверху, при этом остальные карточки можно расставить любым из 98! способов, так как для любого $n \in \mathbb{N}$ число $\sqrt{2} + n$ иррационально.

Оценка. Разобьём все перестановки карточек на 98! групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (очевидно, внутри одной группы ровно 99 перестановок). Достаточно показать, что внутри каждой группы будет хотя бы одна неудачная стопка.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Её можно представить в виде круга, по которому расставлены карточки $a_1, \ldots, a_{99}$, тогда стопки из группы будут иметь вид $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{99}, a_1, \ldots, a_{i-1}$. Начнём идти от карточки с числом a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел по пройденной дуге $a_1, \ldots, a_j$ не даст рациональное число. Далее начнём идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма пройденных чисел не станет рациональной, и так далее. Так, совершив 100 шагов, по принципу Дирихле мы начнём отсчитывать сумму от одной и той же карточки дважды, а значит, мы обернули круг целое число раз, получив в сумме рациональное число, следовательно, сумма всех чисел на самом деле рациональна — противоречие.