Московская предпрофессиональная олимпиада школьников. Математика. 9 класс. Теоретический тур отборочного этапа, 2023/24

1 ноя 2023 г., 10:00 — 20 ноя 2023 г., 23:59

№ 1, вариант 1

5 баллов

Известно, что x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$, а $A = \dfrac{x_1^4 + x_2^4}{|x_1^2 - x_2^2|}$.
Найдите $3\sqrt{5} \cdot A$

47

№ 1, вариант 2

5 баллов

Известно, что x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 5x + 2 = 0$, а $A = \dfrac{x_1^4 + x_2^4}{|x_1^2 - x_2^2|}$.
Найдите $5\sqrt{17} \cdot A$

433

№ 2, вариант 1

5 баллов

Дан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, а их длины в сумме дают 8. Середины сторон четырёхугольника $ABCD$ последовательно соединили и получили четырёхугольник $MNPQ$. Найдите наибольшую возможную площадь $MNPQ$.

4

№ 2, вариант 2

5 баллов

Дан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, а их длины в сумме дают 12. Середины сторон четырёхугольника $ABCD$ последовательно соединили и получили четырёхугольник $MNPQ$. Найдите наибольшую возможную площадь $MNPQ$.

9

№ 3, вариант 1

10 баллов

Пятидесятизначное число состоит только из нечётных цифр. В нём ровно девять единиц, а троек и пятёрок поровну и при этом в три раза меньше, чем девяток. Найдите остаток при делении этого числа на девять.

8

№ 3, вариант 2

10 баллов

Пятидесятизначное число состоит только из нечётных цифр. В нём ровно девять единиц, а троек и пятёрок поровну и при этом в три раза меньше, чем девяток. Найдите остаток при делении этого числа на три.

2

№ 4, вариант 1

10 баллов

Найдите площадь фигуры Ф, если она задана системой:

$$\begin{cases} y \geqslant |x| \\ |y-2| \leqslant 1 \\ (x-3)^2+(y-3)^2 \geqslant 8 \end{cases}$$

Ответ запишите в виде десятичной дроби, учитывая, что $\pi = 3{,}14$.

4.86

№ 4, вариант 2

10 баллов

Найдите площадь фигуры Ф, если она задана системой:

$$\begin{cases} (y \geqslant |x| \\ |y-3| \leqslant 2 \\ (x-5)^2+(y-5)^2 \geqslant 32 \end{cases}$$

Ответ запишите в виде десятичной дроби, учитывая, что $\pi = 3{,}14$.

11.44

№ 5, вариант 1

35 баллов

Слава выписывает в ряд крестики и нолики, всего 12 символов. Сколько существует таких цепочек, чтобы никакие два крестика не стояли рядом?

377

№ 5, вариант 2

35 баллов

Саша выписывает в ряд крестики и нолики, всего 14 символов. Сколько существует таких цепочек, чтобы никакие два нолика не стояли рядом?

987

№ 6, вариант 1

35 баллов

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{y-2}=4 \\ xy-2x+3y=33 \end{cases}$$

Для каждой пары решений найдите сумму x и y. В ответ запишите **наибольшее** из получившихся значений.

27

№ 6, вариант 2

35 баллов

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{y-3} = 4 \\ xy - 3x + 4y = 39 \end{cases}$$

Для каждой пары решений найдите сумму x и y. В ответ запишите **наибольшее** из получившихся значений.

27

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
9 класс

Задание 1.1

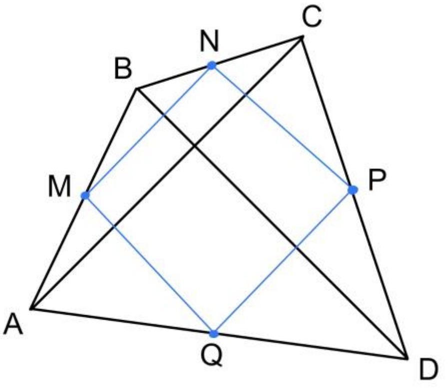
Решение: по теореме Виета: $x_1+x_2=3, x_1x_2=1$. При этом $A=\frac{(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2}{|(x_1+x_2)(x_1-x_2)|}=\frac{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2}{\left|(x_1+x_2)\sqrt{(x_1-x_2)^2}\right|}=\frac{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2}{\left|(x_1+x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right|}=\frac{47}{3\sqrt{5}}$

Задание 1.2

Решение: по теореме Виета: $x_1+x_2=5, x_1x_2=2$. При этом $A=\frac{(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2}{|(x_1+x_2)(x_1-x_2)|}=\frac{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2}{\left|(x_1+x_2)\sqrt{(x_1-x_2)^2}\right|}=\frac{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2}{\left|(x_1+x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right|}=\frac{433}{5\sqrt{17}}$

Задание 2.1

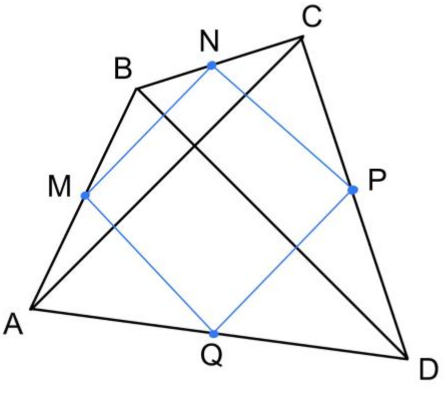
Решение: Рассмотрим четырехугольник ABCD. Пусть AC=2x, BD=2y. По условию AC+BD=2x+2y=8. Далее пусть M, N, P, Q – соответственно середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *AD*. Рассмотрим треугольник ABC. MN в нем – средняя линия, значит MN || AC, MN=$\frac{1}{2}$AC=x. Аналогично в треугольнике ACD PQ – средняя линия, PQ || AC, PQ=$\frac{1}{2}$AC=x. Следовательно MN || PQ, MN=PQ, а значит по признаку параллелограмма MNPQ – параллелограмм. В треугольнике BCD NP – средняя линия, значит NP || BD, NP=$\frac{1}{2}$BD=y. По условию AC⊥BD, значит NP⊥MN. По признаку прямоугольника MNPQ – прямоугольник. Тогда его площадь будет равна S=NP $\cdot$ MN=xy. $x+y=4$, тогда $y=4-x$. Подставим в выражение для площади, $S=x(4-x)=4x-x^2$. Наибольшее значение квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом принимает в вершине параболы, при $x = 2$. Значит



максимальная площадь: S=4.

Задание 2.2

Решение: Рассмотрим четырехугольник ABCD. Пусть AC=2x, BD=2y. По условию AC+BD=2x+2y=12. Далее пусть *M, N, P, Q* – соответственно середины сторон *AB, BC, CD, AD*. Рассмотрим треугольник ABC. MN в нем – средняя линия, значит MN || AC, MN=12AC=x. Аналогично в треугольнике ACD PQ – средняя линия, PQ || AC, PQ=12AC=x. Следовательно MN || PQ, MN=PQ, а значит по признаку параллелограмма MNPQ – параллелограмм. В треугольнике BCD NP – средняя линия, значит NP || BD, NP=12BD=y. По условию AC⊥BD, значит NP⊥MN. По признаку прямоугольника MNPQ – прямоугольник. Тогда его площадь будет равна S=NPMN=xy. $x + y = 6$, тогда $y = 6 - x$. Подставим в выражение для площади, $S = x(6 - x) = 6x - x^2$. Наибольшее значение квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом принимает в вершине параболы, при $x = 3$. Значит



максимальная площадь: S=9.

Задание 3.1

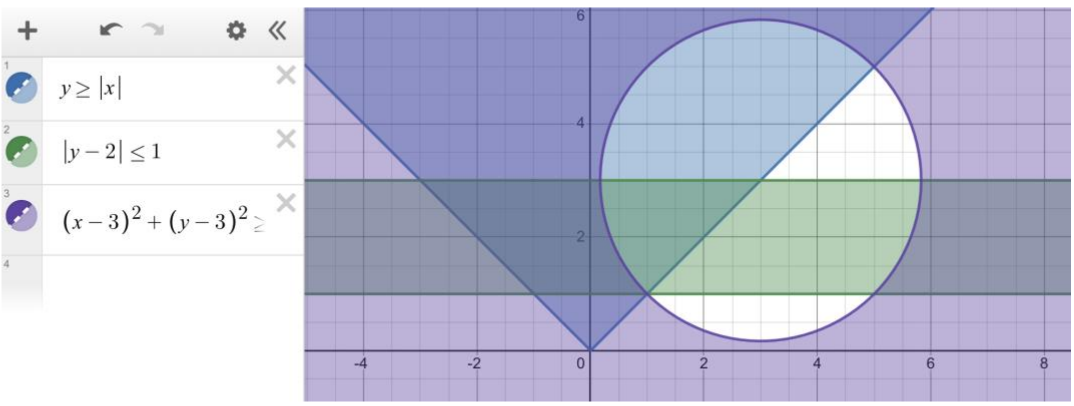
Решение: Пусть число троек это x. Тогда число пятерок – это x, число девяток – $3x$. При этом число семерок $50 - 9 - x - x - 3x = 41 - 5x$. Число имеет такой же остаток при делении на 9, как и его сумма цифр. Сумма цифр: $1 \cdot 9 + 3 \cdot x + 5 \cdot x + 7 \cdot (41 - 5x) + 9 \cdot 3x = 296$. Остаток при делении 296 на 9 это 8.

Задание 3.2

Решение: Пусть число троек это x. Тогда число пятерок – это x, число девяток – $3x$. При этом число семерок $50 - 9 - x - x - 3x = 41 - 5x$. Число имеет такой же остаток при делении на 9, как и его сумма цифр. Сумма цифр: $1 \cdot 9 + 3 \cdot x + 5 \cdot x + 7 \cdot (41 - 5x) + 9 \cdot 3x = 296$. Остаток при делении 296 на 3 это 2.

Задание 4.1

Решение: первое множество — часть плоскости выше графика $y = |x|$, второе — «полоса» между параллельными прямыми $y = 1, y = 3$. Третье —

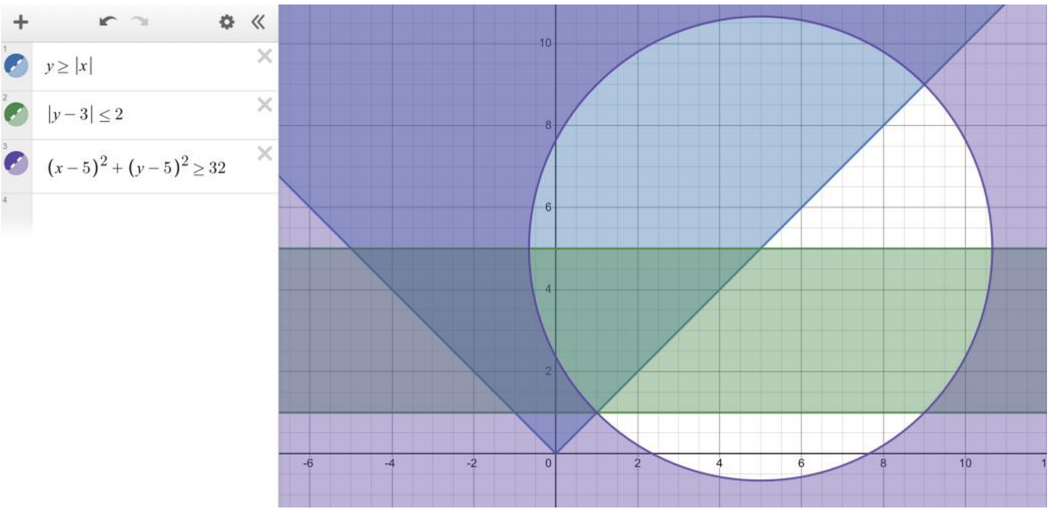


внешность круга с центром в точке (3,3) и радиусом $2\sqrt{2}$

Фигура Ф: трапеция с вершинами в точках (1;1), (-1;1), (3, 3), (-3;3) за вычетом кругового сектора с центральным углом $\pi/4$, радиуса $2\sqrt{2}$. Площадь Ф: $8 - \pi$

Задание 4.2

Решение: первое множество — часть плоскости выше графика $y = |x|$, второе — «полоса» между параллельными прямыми $y = 1, y = 5$. Третье — внешность круга с центром в точке (5,5) и радиусом $4\sqrt{2}$



Фигура Ф: трапеция с вершинами в точках (1;1), (-1;1), (5, 5), (-5;5) за вычетом кругового сектора с центральным углом $\pi/4$, радиуса $4\sqrt{2}$. Площадь Ф: $24 - 4\pi$

Задание 5.1

Решение: пусть x_n — число подходящих цепочек длины n. Так $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. В общем случае x_n ={число подходящих цепочек длины n, начинающихся с нолика}+{число подходящих цепочек длины n, начинающихся с крестика}. Первое слагаемое это x_{n-1}, потому что нолик на первом месте не вносит дополнительных ограничений, а остается достроить цепочку длиной $n-2$. В случае со вторым слагаемым после крестика мы обязаны поставить нолик и остается достроить цепочку длиной $n-2$ без дополнительных ограничений, их число x_{n-2} . Таким образом получаем рекуррентное соотношение: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Получается ряд: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. Последнее число и есть x_{12}

Задание 5.2

Решение: пусть x_n — число подходящих цепочек длины n. Так $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. В общем случае x_n ={число подходящих цепочек длины n, начинающихся с нолика}+{число подходящих цепочек длины n, начинающихся с крестика}. Первое слагаемое это x_{n-1}, потому что нолик на первом месте не вносит дополнительных ограничений, а остается достроить цепочку длиной $n-2$. В случае со вторым слагаемым после крестика мы обязаны поставить нолик и остается достроить цепочку длиной $n-2$ без дополнительных ограничений, их число x_{n-2} . Таким образом получаем рекуррентное соотношение: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Получается ряд: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987. Последнее число и есть x_{14}

Задание 6.1

Решение: пусть $\sqrt[3]{x+3} = a, \sqrt[3]{y-2} = b$. Тогда $x = a^3 - 3, y = b^3 + 2$ и исходная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} a+b=4, \\ (a^3-3)(b^3+2)-2(a^3-3)+3(b^3+2)=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ a^3b^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=4, \\ ab=3 \end{cases}$$

откуда $a = 1, b = 3$ или $a = 3, b = 1$. Возвращаясь к старым переменным, получаем: $x = -2, y = 29$ или $x = 24, y = 3$

Задание 6.2

Решение: пусть $\sqrt[3]{x+4} = a, \sqrt[3]{y-3} = b$. Тогда $x = a^3 - 4, y = b^3 + 3$ и исходная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} a+b=4, \\ (a^3-4)(b^3+3)-3(a^3-4)+4(b^3+3)=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ a^3b^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=4, \\ ab=3 \end{cases},$$

откуда $a = 1, b = 3$ или $a = 3, b = 1$. Возвращаясь к старым переменным, получаем: $x = -3, y = 30$ или $x = 23, y = 4$