МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР.
11 класс

Задание 1.1 Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $k \cdot l \cdot m \cdot n \cdot p = 324000$, если известно, что k кратно 4, а m кратно 15.

Ответ: 18375

Решение: $324000 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$, нужно распределить эти множители по переменным k, l, m, n, p. Известно, что как минимум 2^2 приходится на переменную k, а $3^1 \cdot 5^1$ на переменную m. Остается по всем пяти переменным распределить 3 двойки, 3 тройки и 2 пятерки. Число способов распределить 3 двойки по пяти множителям – это число сочетаний с повторениями: $\overline{C_5^3} = C_7^3 = 35$. Аналогично число способов распределить 3 тройки по пяти множителям: $\overline{C_5^3} = C_7^3 = 35$. И, наконец, способов распределить 2 пятерки по пяти множителям: $\overline{C_5^2} = C_6^2 = 15$. По правилу произведения получаем ответ: $35 \cdot 35 \cdot 15 = 18375$.

Задание 1.2 Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $k \cdot l \cdot m \cdot n \cdot p = 180000$, если известно, что k кратно 6, а m кратно 10.

Ответ: 6125

Решение: $180000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$, нужно распределить эти множители по переменным k, l, m, n, p. Известно, что как минимум $2^1 \cdot 3^1$ приходится на переменную k, а $2^1 \cdot 5^1$ на переменную m. Остается по всем пяти переменным распределить 3 двойки, 1 тройку и 3 пятерки. Число способов распределить 3 двойки по пяти множителям – это число сочетаний с повторениями:

$\overline{C_5^3} = C_7^3 = 35$. Число способов распределить 1 тройку по пяти множителям это 5. И, наконец, способов распределить 3 пятерки по пяти множителям: $\overline{C_5^3} = C_7^3 = 35$. По правилу произведения получаем ответ: $35 \cdot 5 \cdot 35 = 6125$.

Задание 2.1. На столе стоит деревянный кубик $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 3. Улитка ползет из точки E, находящейся на прямой AB на расстоянии 2 от B (см. рисунок) в точку F на ребре CC_1, причем $CF : FC_1 = 2 : 1$. Найти длину кратчайшего пути для улитки.

Ответ: 5

Решение: Кратчайший путь будем проходить по граням $ABCD$ и BCC_1B_1.

Пусть это отрезки EK и KF ($K \in BC$).

Отложим на $ABCD$ $KF' = KF$, ($F' \in CD$), тогда кратчайший путь улитки: $EK + KF = EK + KF' \geqslant EF'$ по неравенству треугольника, значит кратчайший путь равен длине EF' (когда точка K лежит на EF').

Из равенства прямоугольных треугольников $\triangle KFC$ и $\triangle KF'C$ (по катету и гипотенузе) следует: $CF' = CF$; $FC_1 = F'D$, $\Rightarrow CF' : F'D = CF : FC_1 = 2 : 1$.

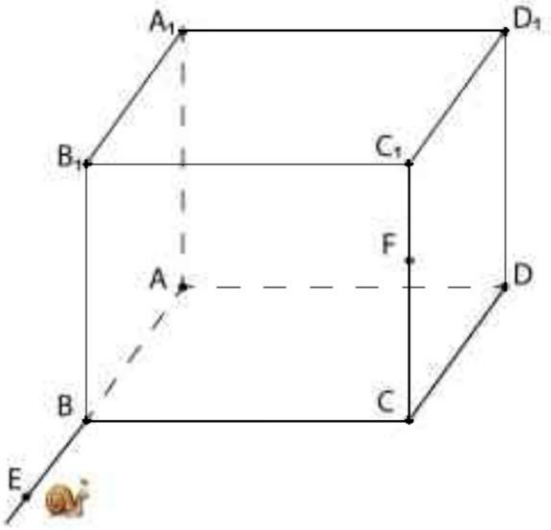
Таким образом, $F'D = 1$; $CF' = 2$. По теореме Пифагора в $\triangle ADF'$: $AF' = \sqrt{10}$, значит $\sin\angle F'AD = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \cos\angle EAF'$.

Тогда по теореме косинусов в $\triangle EAF'$: $EF' = 5$.

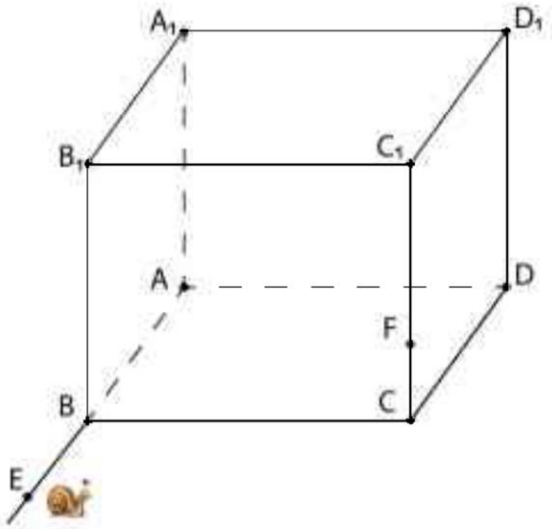
Задание 2.2. На столе стоит деревянный кубик $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 4. Улитка ползет из точки E находящейся на прямой AB расстоянии 2 от B (см. рисунок) в точку F на ребре CC_1, причем $CF : FC_1 = 1 : 3$. Найти длину кратчайшего пути для улитки.

Ответ: 5

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР.
11 класс



К заданию 2.1



К заданию 2.2

Решение: Кратчайший путь будем проходить по граням $ABCD$ и BCC_1B_1.

Пусть это отрезки EK и KF ($K \in BC$).

Отложим на $ABCD$ $KF' = KF$, ($F' \in CD$), тогда кратчайший путь улитки: $EK + KF = EK + KF' \geqslant EF'$ по неравенству треугольника, значит кратчайший путь равен длине EF' (когда точка K лежит на EF').

Из равенства прямоугольных треугольников $\triangle KFC$ и $\triangle KF'C$ (по катету и гипотенузе) следует: $CF' = CF$; $FC_1 = F'D$, $\Rightarrow CF' : F'D = CF : FC_1 = 1 : 3$.

Таким образом, $F'D = 3$; $CF' = 1$. По теореме Пифагора в $\triangle ADF'$: $AF' = \sqrt{5}$, значит $\sin\angle F'AD = 0{,}6 = \cos\angle EAF'$.

Тогда по теореме косинусов в $\triangle EAF'$: $EF' = 5$.

Задание 3.1 Найти максимальное значение $x + y$, если известно, что $\frac{2}{\pi}\left(\arcsin(1 - 2024x) + 2\arccos(2025 - y)\right) = 5 + \sqrt{x}$.

Ответ: 2026

Решение: учитывая, что $\arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos t \in [0;\pi]$, наибольшее значение левой части равно $\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{\pi}{2}+2\pi\right]=5$. В то же время 5 — это наименьшее значение правой части. Равенство возможно только в случае, если обе части равны 5. Это будет при $x=0;\ y=2026$, значит $\max(x+y)=2026$.

Задание 3.2 Найти минимальное значение $x+y$, если известно, что $\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(1+2025x\right)+3\arccos(y-2024)\right)=7+3x^2$.

Ответ: 2023

Решение: учитывая, что $\arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos t \in [0;\pi]$, наибольшее значение левой части равно $\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{\pi}{2}+3\pi\right]=7$. В то же время 7 — это наименьшее значение правой части. Равенство возможно только в случае, если обе части равны 7. Это будет при $x=0;\ y=2023$, значит $\max(x+y)=2023$.

Задание 4.1 При каком наибольшем значении параметра множество решений неравенства $\frac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x}\right)\left(3^a\cdot x-9\right)}{\cos\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)-\cos x}\leqslant 0$ задает точку?

Ответ: 2

Решение: из ограничений на подкоренные выражения: $x\in[0,2]$, значит в знаменателе можно опустить знак модуля. Заметим, что функция $\cos t$ строго убывает при $t\in[0,2]$, а значит по методу рационализации знак выражения $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos x$ совпадает со знаком $x-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$, то есть

знаменатель в ОДЗ строго отрицательный, и неравенство сводится к тому, что выражение в числителе неотрицательно: $\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x}\right)\left(3^a\cdot x-9\right)\geqslant 0.$

Домножив неравенство на сопряженное к первому множителю $\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x}\right)$, получим $(2-2x)(3^a\cdot x-9)\geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(3^{a-2}\cdot x-1)\leqslant 0$. Для того, чтобы решением неравенства была точка, необходимо и достаточно, чтобы $3^{a-2}=1$, то есть $a=2$, а неравенство принимает $(x-1)^2\leqslant 0$ и его единственное решение: $x=1$ (принадлежит ОДЗ).

Задание 4.2 При каком наибольшем значении параметра множество решений неравенства $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2^a\cdot x-8\right)}{\sin\left(|x|+\frac{\pi}{6}\right)-\sin x}\leqslant 0$ является точкой?

Ответ: 4

Решение: из ограничений на подкоренные выражения: $x\in[0,1]$, значит в знаменателе можно опустить знак модуля. Заметим, что функция $\sin t$ строго возрастает при $t\in[0,1]$, а значит по методу рационализации знак выражения $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin x$ совпадает со знаком $\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-x=\dfrac{\pi}{6}$, то есть знаменатель в ОДЗ строго положительный, и неравенство сводится к тому, что выражение в числителе неположительно: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2^a\cdot x-8\right)\leqslant 0.$

Домножив неравенство на сопряженное к первому множителю $\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)$, получим $(2x-1)(2^a\cdot x-8)\leqslant 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2^{a-3}\cdot x-1)\leqslant 0$. Для того, чтобы решением неравенства была точка, необходимо и достаточно, чтобы $2^{a-3}=2$, то есть $a=4$, а неравенство принимает $(2x-1)^2\leqslant 0$ и его единственное решение: $x=\dfrac{1}{2}$ (принадлежит ОДЗ).

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР.
11 класс

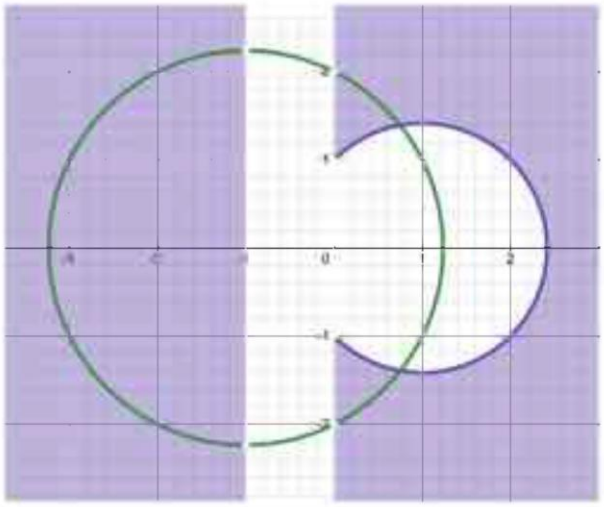
Задание 5.1 Найти целочисленные значения параметра a, при которых система

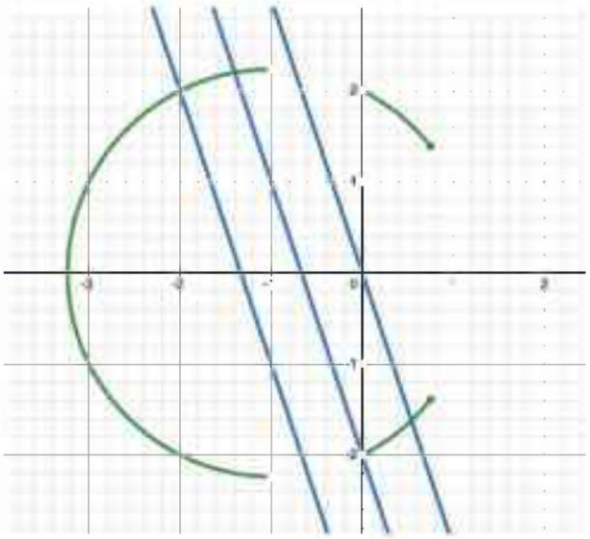
$$\begin{cases} \log_{(|x|+|x+1|)}(y^2+x^2) \geqslant 1, \\ x(x+2)=(2-y)(2+y), \\ 3x+y+2a=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответ записать сумму этих целочисленных значений.

Ответ: 3

Решение: изобразим на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой. В первом неравенстве по методу рационализации имеем: $(|x|+|x+1|-1)(x^2+y^2-|x|-|x+1|) \geqslant 0$. Это объединение полуплокости $x>0$ за вычетом части круга (с центром точке $(1;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$) и полуплоскость $x<-1$. Второе множество задает окружность с центром точке $(-1;0)$ и радиусом $\sqrt{5}$. В пересечении первого и второго множества остаются полуокружность (при $x<-1$) и две дуги (см. рисунок). Прямая $3x+y+a=0$ имеет единственное пересечение с этим множеством при целочисленных значениях параметра $a=0, a=1, a=2$.



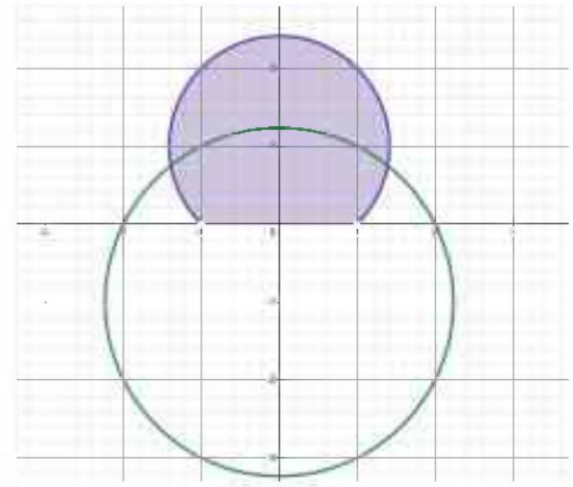


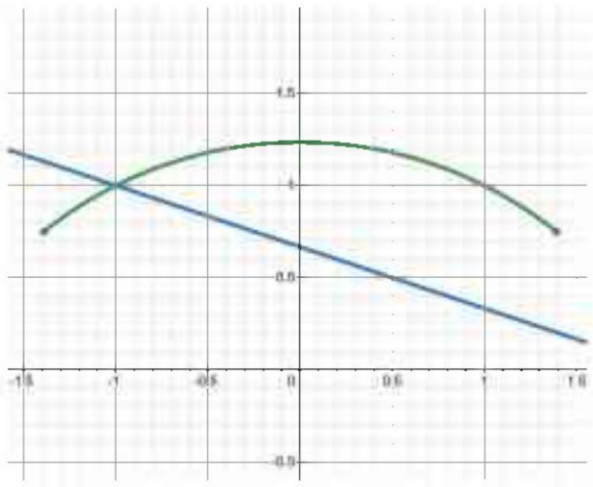
МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР.
11 класс

Задание 5.2 Найти целочисленные значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \log_{(|y+1|+|y|)}(y^2+x^2) \leqslant 1, \\ y^2+2y=(2+x)(2-x), \\ x+3y-2a=0 \end{cases}$ имеет единственное решение. В ответ записать сумму этих целочисленных значений.

Ответ: 1

Решение: изобразим на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой. В первом неравенстве по методу рационализации имеем: $(|y+1|+|y|-1)(x^2+y^2-|y|-|y+1|) \leqslant 0$. Это часть круга с центром в точке (1;0) и радиусом $\sqrt{2}$, расположенная в полуплоскости $y>0$. Второе множество задает окружность с центром точке $(0;-1)$ и радиусом $\sqrt{5}$. В пересечении первого и второго множества остается дуга второй окружности (с ординатами из отрезка $y \in \left[\frac{3}{4};\sqrt{5}-1\right]$). Прямая $x+3y-2a=0$ имеет единственное пересечение с этим множеством при целочисленном значении параметра $a=1$.





Москва
2024-2025

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР.
11 класс

Задание 6.1 При каком наименьшем значении параметра система имеет единственное решение $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x} = a^2+3a+4, \\ \cos\left(\dfrac{\pi x^2-\pi}{x}\right)+a=0. \end{cases}$

Ответ: -1

Решение: заметим, что система не изменится при замене $x \leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ (с учетом того, что $\cos t$ — четная функция). А значит, если x_0 является решением системы, то и $\dfrac{1}{x_0}$ — тоже решение. Так как нужно единственное решение, то необходимо $x = \pm 1$. Рассмотрим два случая

1) Если $x = 1$, то $\begin{cases} a^2+3a+2=0, \\ 1+a=0. \end{cases}$ Отсюда $a = -1$.

2) Если $x = -1$, то $\begin{cases} a^2+3a+6=0, \\ 1+a=0. \end{cases}$ Здесь решений нет.

Остается проверить, что $a = -1$ — подходящее значение. Подставляя в систему, получаем $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x} = 2, \\ \cos\left(\dfrac{\pi x^2-\pi}{x}\right)=1. \end{cases}$ Из первого уравнения $x = 1$, второе уравнение при этом справедливо. Значит $a = -1$ — нужное значение параметра.

Задание 6.2 При каком наименьшем значении параметра система имеет единственное решение $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} = a^2+5a+2, \\ \cos\left(\pi x - \dfrac{\pi}{x}\right) = 1-a. \end{cases}$

Ответ: 0

Решение: заметим, что система не изменится при замене $x \leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ (с учетом того, что $\cos t$ — четная функция). А значит, если x_0 является решением системы, то и $\dfrac{1}{x_0}$ — тоже решение. Так как нужно единственное решение, то необходимо $x = \pm 1$. Рассмотрим два случая

1) Если $x = 1$, то $\begin{cases} a^2+5a = 0, \\ a = 0. \end{cases}$ Отсюда $a = 0$.

2) Если $x = -1$, то $\begin{cases} a^2+5a+4 = 0, \\ a = 0. \end{cases}$ Здесь решений нет.

Остается проверить, что $a = 0$ — подходящее значение. Подставляя в систему, получаем $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} = 2, \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{x}\right) = 1. \end{cases}$ Из первого уравнения $x = 1$, второе уравнение при этом справедливо. Значит $a = 0$ — нужное значение параметра.