

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников. Математика. 9 класс. Теоретический тур отборочного этапа, 2024/25

5 ноября 2024 г., 10:00 — 20 ноября 2024 г., 23:59

№ 1, вариант 1

10 баллов

Фигура Φ задана системой неравенств:

$$\begin{cases} |y - 2| + |y + 3| \leqslant 5 \\ 2x - 4y - 23 \leqslant 0 \\ 2x + y - 8 \geqslant 0 \end{cases}$$

Найдите диаметр наименьшего по площади круга, которым можно накрыть фигуру Φ целиком.

Число

№ 1, вариант 2

10 баллов

Фигура Φ задана системой неравенств:

$$\begin{cases} |x - 1| + |x + 4| \leqslant 5 \\ 2x - 4y + 6 \leqslant 0 \\ 2x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$$

Найдите диаметр наименьшего по площади круга, которым можно накрыть фигуру Φ целиком.

Число

№ 2, вариант 1

10 баллов

В параллелограмме $ABCD$ ($AB < BC$) проведены биссектрисы соседних углов A и B , которые пересекаются в точке H . K — точка пересечения биссектрисы угла A и диагонали BD , причём $BK : KD = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника BHK , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Число

№ 2, вариант 2

10 баллов

В параллелограмме $ABCD$ ($AB < BC$) проведены биссектрисы соседних углов A и B , которые пересекаются в точке H . K – точка пересечения биссектрисы угла A и диагонали BD , причём $BK : KD = 2 : 3$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника BHK равна 3.

Число

№ 3, вариант 1

15 баллов

Лёша загадал квадратный трёхчлен с целочисленными коэффициентами. Известно, что сумма квадратов его корней равна 4,25, а старший коэффициент и свободный член в сумме равны нулю. Кроме того, прямая $y = x - 2$ пересекает график соответствующей параболы в точках, абсциссы которых отличаются на 2. Найдите значение этого квадратного трёхчлена в точке $x = 5$.

Число

№ 3, вариант 2

15 баллов

Лёша загадал квадратный трёхчлен с целочисленными коэффициентами. Известно, что сумма квадратов его корней равна 1,25, а коэффициент при x и свободный член в сумме равны нулю. Кроме того, прямая $y = 5x - 1$ пересекает график соответствующей параболы в точках, абсциссы которых отличаются на 2. Найдите значение этого квадратного трёхчлена в точке $x = 4$.

Число

№ 4, вариант 1

15 баллов

Сколько существует сорокозначных чисел с суммой цифр семь, если известно, что оно при этом делится на 1000.

Число

№ 4, вариант 2

15 баллов

Сколько существует тридцатизначных чисел с суммой цифр восемь, если известно, что оно при этом делится на 100.

Число

№ 5, вариант 1

25 баллов

Найдите $\max(x + y + z)$, если известно, что $y \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{N}$ и $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2 = 0$.

Число

№ 5, вариант 2

25 баллов

Найдите $\min(x + y + z)$, если известно, что $y \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{N}$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2 = 0$.

Число

№ 6, вариант 1

25 баллов

На доске записаны два числа: 3 и 4. Затем их стёрли и вместо них записали новую пару чисел: их сумму и их среднее гармоническое. Этую же процедуру проделали ещё 2024 раза, а получившиеся в итоге числа перемножили. Найдите последнюю цифру произведения.

Примечание: среднее гармоническое положительных чисел a и b равно

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Число

№ 6, вариант 2

25 баллов

На доске записаны два числа: 2 и 7. Затем их стёрли и вместо них записали новую пару чисел: их сумму и их среднее гармоническое. Этую же процедуру проделали еще 2023 раза, а получившиеся в итоге числа перемножили. Найдите последнюю цифру произведения.

Примечание: среднее гармоническое положительных чисел a и b равно

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Число