ММО-2026, 9 класс

Задача 1. Алиса записала положительные числа a, b, c, d, e (не обязательно целые), а Маруся — числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$. Оказалось, что сумма чисел Алисы больше суммы чисел Маруси. Могло ли произведение чисел Алисы оказаться меньше произведения чисел Маруси?
(Д. Мухин)

Ответ: могло.

Решение. Рассмотрим, например, числа 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 10. Их сумма больше суммы их обратных:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+10=12+\tfrac{1}{12}>10+\tfrac{1}{10}=1+2+3+4+\frac{1}{10}.$$

С другой стороны, их произведение меньше произведения обратных:

$$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 10=\frac{5}{12}<\frac{12}{5}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{10}.\qquad\square$$

Замечание. Существует множество других примеров. Например, также подойдут числа $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $4n$ при $n>1$.

Задача 2. Дан остроугольный треугольник ABC. На его описанной окружности отмечена точка D, диаметрально противоположная вершине A. Точки X и Y на стороне BC таковы, что $BX=XD$ и $CY=YD$ (точка X лежит на отрезке BY). Докажите, что DA — биссектриса угла XDY.
(А. Доледенок)

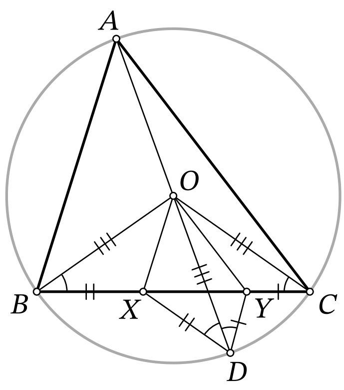

Рис. 1: к решению 1 задачи 2

Решение 1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Рассмотрим треугольники BOX и DOX. В них $OB=OD$ как радиусы, $BX=DX$ по условию, OX — общая сторона, поэтому они равны по трём сторонам (рис. 1). Следовательно, $\angle ODX=\angle OBX$. Аналогично треугольники COY и DOY равны по трём сторонам, поэтому $\angle ODY=\angle OCY$.

Но треугольник OBC равнобедренный, поэтому $\angle OBX = \angle OCY$, то есть $\angle ODX = \angle ODY$, что и требовалось доказать. $\square$

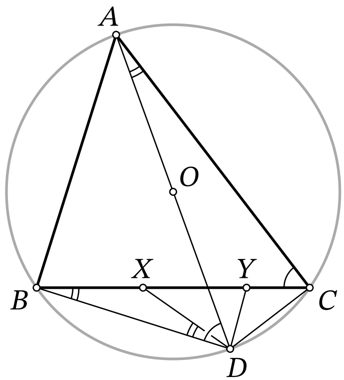

Рис. 2: к решению 2 задачи 2

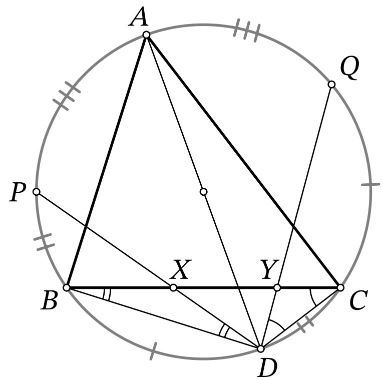

Рис. 3: к решению 3 задачи 2

Решение 2. Так как треугольник BXD равнобедренный, то $\angle BDX = \angle DBX$. Тогда

$$\angle ADX = \angle ADB - \angle BDX = \angle ACB - \angle DBX = \angle ACB - \angle DAC.$$

Из равнобедренности треугольника AOC следует, что

$$\angle OAC = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC.$$

Таким образом, $\angle ADX = \angle ABC + \angle ACB - 90^\circ$. Так как это выражение симметрично относительно перестановки вершин B и C, то, аналогично найдя $\angle ADY$, мы получим ту же величину. Следовательно, $\angle ADX = \angle ADY$, что и требовалось доказать. $\square$

Решение 3. Продлим прямые DX и DY до повторного пересечения с окружностью в точках P и Q соответственно (рис. 3). Так как из равнобедренностей треугольников следуют равенства вписанных углов $\angle BDP = \angle DBC$ и $\angle CDQ = \angle DCB$, то равны и дуги, на которые они опираются: $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{QC} = \overset{\frown}{BD}$. Воспользовавшись равенством полуокружностей, образованных диаметром AD, получим равенство дуг

$$\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{ABD} - \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{ACD} - \overset{\frown}{QC} - \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AQ}\,.$$

Но тогда равны и вписанные углы ADP и ADQ, опирающиеся на эти дуги, что и требовалось доказать. $\square$

Задача 3. На столе лежат 11 арбузов массами 1, 2, 3, …, 11 кг. Алёна и Богдан раскладывают арбузы в четыре пакета; каждый пакет выдерживает 14 кг, а от большего веса рвётся. Они по очереди выбирают арбуз со стола и кладут его в любой из пакетов так, чтобы пакет не порвался. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Алёна. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? *(Л. Смирнова)*

Ответ: Алёна.

Решение. Покажем, как Алёна может обеспечить себе победу. Первым ходом она положит в один из пакетов арбуз массой 1 кг. Оставшиеся 10 арбузов Алёна мысленно разобьёт на пары $\{2; 11\}$, $\{3; 10\}$, $\{4; 9\}$, $\{5; 8\}$, $\{6; 7\}$; сумма в масс в каждой паре 13 кг.

Пусть Богдан своим первым ходом положит арбуз массой k_1 в какой-то пакет. Тогда Алена в свой ход положит парный к k_1 арбуз (с массой $13 - k_1$) в тот же пакет. После такой пары ходов в этот пакет добавилось 13 кг, и теперь в нём либо 13 кг (если до хода Богдана пакет был пустой), либо 14 кг (если в нём был арбуз 1 кг). В любом случае в этот пакет больше не поместится ни один из оставшихся на столе арбузов.

Пусть своим вторым ходом Богдан положит арбуз массой k_2 в какой-то из трёх оставшихся пакетов. Тогда Алёна опять положит арбуз с массой $13-k_2$ в этот же пакет. Аналогично, в этом пакете теперь либо 13 кг, либо 14 кг, и больше в этот пакет ребята ничего не смогут положить.

Аналогично на следующей паре ходов ребята наполнят третий пакет арбузами k_3 и $13-k_3$, а на следующей — наполнят четвёртый пакет арбузами k_4 и $13 - k_4$.

После этого наступит ход Богдана. Но он не может сделать ход, потому что ни в одном из пакетов не осталось более 1 кг свободного места. Значит, Алёна выигрывает. $\square$

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, K — точка пересечения диагоналей. Описанная окружность треугольника ABD повторно пересекает сторону BC в точке Y, а описанная окружность треугольника BCD повторно пересекает сторону AB в точке X. Докажите, что $\angle AKX = \angle CKY$. *(Ф. Нилов)*

Решение 1. Так как треугольник ABC равнобедренный, то $\angle BAC = \angle BCA$. Тогда искомое равенство $\angle AKX = \angle CKY$ эквивалентно подобию треугольников AKX и CKY. Именно это подобие мы и будем доказывать.

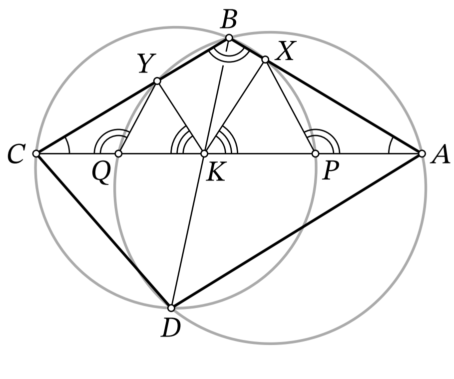

Рис. 4: к решению 1 задачи 4

Отметим точки, в которых описанные окружности треугольников ABD и BCD повторно пересекают диагональ AC — точки Q и P соответственно (рис. 4). Из вписанности четырёхугольников $PXBC$ и $QYBA$ имеем равенства углов $\angle APX = 180^\circ - \angle CPX = \angle ABC$ и $\angle CQY = 180^\circ - \angle AQY = \angle ABC$. Значит, $\angle APX = \angle CQY$. Таким образом, треугольники APX и CQY подобны (по двум углам), а следовательно, равны отношения сторон в этих треугольниках:

$$\frac{AX}{AP} = \frac{CY}{CQ}. \qquad (1)$$

Используя теорему о произведении отрезков хорд, получим равенства $AK \cdot QK = BK \cdot DK = CK \cdot PK$, откуда

$$\frac{PK}{AK} = \frac{QK}{CK} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AK - AP}{AK} = \frac{CK - CQ}{CK} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AP}{AK} = \frac{CQ}{CK}.$$

Почленно перемножив это равенство с равенством (1), получим

$$\frac{AX}{AK} = \frac{CY}{CK}.$$

Вместе с равенством углов $\angle BAC = \angle BCA$ это означает, что треугольники AKX и CKY подобны, что и требовалось. □

Решение 2. Как и в предыдущем решении, достаточно доказать, что треугольники AKX и CKY подобны. Для этого, в свою очередь, достаточно показать равенство отношений $AK : CK = AX : CY$, так как равенство углов KAX и KCY следует из равнобедренности треугольника ABC.

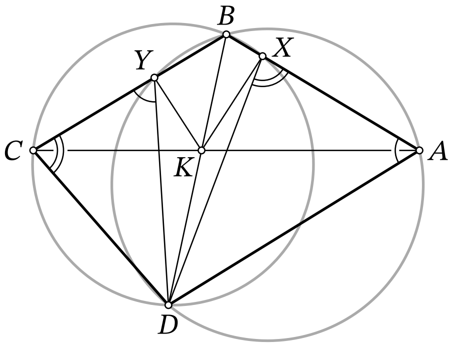

Рис. 5: к задаче 4

По теореме синусов в треугольнике ABK имеем $AK = \sin(\angle ABK) \cdot BK / \sin(\angle BAK)$. Записав аналогичное равенство для треугольника CBK и разделив одно на другое, получаем

$$\frac{AK}{CK} = \frac{\sin(\angle ABK)}{\sin(\angle CBK)} \cdot \frac{BK}{BK} \cdot \frac{\sin(\angle BCK)}{\sin(\angle BAK)} = \frac{\sin(\angle ABK)}{\sin(\angle CBK)}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из теоремы синусов в треугольнике ABD извлекаем $\sin(\angle ABD) = AD \cdot \sin(\angle BAD)\,/\,BD$, что после деления на аналогичное равенство для треугольника CBD дает

$$\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle CBD)} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle BCD)}.$$

Так как $\angle ABD = \angle ABK$ и $\angle CBD = \angle CBK$, то можно совместить это с равенством (1) и получить

$$\frac{AK}{CK} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle BCD)}. \tag{2}$$

Теперь заметим, что треугольники DAX и DYC подобны (рис. 5). Действительно, из того, что $ABYD$ вписанный, следует, что $\angle DAX = 180^\circ - \angle BYD = \angle DYC$; аналогично из вписанности $CBXD$ следует $\angle DCY = \angle DXA$; этих двух равенств углов достаточно для подобия. Из подобия и из теоремы синусов для треугольника ADX получаем

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AD}{XD} \cdot \frac{XD}{CD} = \frac{\sin(\angle DXA)}{\sin(\angle DAX)} \cdot \frac{AX}{CY} = \frac{\sin(\angle DCY)}{\sin(\angle DAX)} \cdot \frac{AX}{CY}.$$

Подставляя в (2), находим

$$\frac{AK}{CK} = \frac{\sin(\angle DCY)}{\sin(\angle DAX)} \cdot \frac{AX}{CY} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{AX}{CY},$$

что и требовалось. □

Задача 5. Существует ли бесконечное множество S, состоящее из квадратов натуральных чисел, такое, что для любых двух различных x и y из S найдётся z из S (возможно, совпадающее с x или y), для которого $x+y+z$ — квадрат натурального числа? *(М. Евдокимов)*

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим множество S, состоящее из чисел $1, 2^2, 2^4, 2^6$ и т. д., то есть из всех чётных степеней двойки. Очевидно, все они являются квадратами натуральных чисел.

Проверим, что для любых двух различных чётных степеней двойки можно подобрать третью (возможно, совпадающую с какой-то из этих двух) так, чтобы их сумма оказалось полным квадратом.

Пусть $x = 2^{2m}$ и $y = 2^{2n}$, причём $n > m$. Возьмём $z = 2^{2(2n-m-1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2^{2m} + 2^{2n} + 2^{2(2n-m-1)} = \\ &= 2^{2m} + 2 \cdot 2^m \cdot 2^{2n-m-1} + 2^{2(2n-m-1)} = (2^m + 2^{2n-m-1})^2. \end{aligned}$$ □

Задача 6. В гостинице $a > 1$ этажей, на каждом этаже b одноместных номеров. На математический конгресс приехало ab математиков. Оказалось, что каждому математику на каждом этаже нравится ровно один номер. Докажите, что число способов поселить всех математиков в гостиницу так, чтобы каждому нравился его номер, чётно.

(В. Ретинский)

Решение. Будем называть этажи, кроме первых двух, *верхними*. Зафиксируем произвольное расселение на всех верхних этажах. Покажем, что количество способов дополнить его до полного расселения чётно.

Построим граф, в котором $2a$ вершин соответствуют номерам на первых двух этажах. Для каждого математика, которого мы не поселили на верхних этажах, проведём ребро, соединяющее два подходящих ему номера. Получим граф G, в котором $2a$ вершин и $2a$ рёбер.

Если в графе G есть вершина v степени 1, то в соответствующий номер можно поселить только одного математика. Поселим математика в этот номер, а из графа G удалим вершину v и исходящее из неё ребро. Будем делать такие шаги, пока в графе остаются висячие вершины.

В итоге мы получим непустой граф G'. Действительно, рассмотрим самую последнюю удаленную висячую вершину — исходящее из неё ребро соединяло её с другой вершиной, которая уже не могла быть удалена; то есть хотя бы одна вершина в G' должна остаться.

Если в графе G' найдётся изолированная вершина v, то в некотором номере не сможет жить ни один математик. Тогда количество способов расселить всех равно 0, что является чётным числом.

В ином случае в графе G' нет вершин степени 0 и 1, то есть степень каждой вершины не меньше 2. Отсюда следует, что суммарная степень всех вершин не меньше удвоенного количества вершин. С другой стороны, вершин и рёбер поровну, так как изначально в графе G их было поровну, а каждым шагом мы удаляли одну вершину и одно ребро. Значит, суммарная степень вершин (всегда равная удвоенному количеству рёбер) в точности равна удвоенному количеству вершин. Отсюда следует, что степени всех вершин равны 2.

Тогда граф G' является объединением нескольких непересекающихся циклов. (Это утверждение, известное как лемма о хороводах, следует из того, что если выйти из любой вершины, то можно единственным способом идти по ребрам и зациклиться; таким образом каждой вершине сопоставляется единственный содержащий её цикл.) Нетрудно видеть, что для каждого цикла есть ровно два способа сопоставить вершинам-номерам рёбра-математиков: если цикл нарисовать по кругу, то можно либо каждой вершине сопоставить правое ребро, либо каждой — левое. Тогда если граф G' состоит из $c \geqslant 1$ циклов, то количество способов расселить математиков равно 2^c, что является чётным числом.

Мы доказали, что если фиксировать расселение во всех верхних этажах, то количество способов дополнить его до полного расселения чётно. Осталось просуммировать полученные величины по всем способам расселения в верхних этажах. С одной стороны, мы получим искомое количество способов расселить всех. С другой стороны, так как сумма чётных чисел чётна, то результат будет чётным. □

Комментарий. Эту идею можно реализовать и иначе, напрямую построив разбиение расселений на пары. Рассмотрим произвольное расселение и построим ориентированный граф, вершинами которого будут номера первых двух этажей; ребро выходит из номера A в номер B на другом этаже, если математику, живущему в A, нравится B.

Из каждой вершины, таким образом, выходит ровно одно ребро. Значит, мы можем выйти из любой вершины и идти по рёбрам, пока не зациклимся (не обязательно при этом вернувшись в исходную). Если вершина участвует в цикле, то цикл восстанавливается однозначно (можно просто начать из данной вершины и идти по рёбрам); следовательно, циклы не пересекаются.

Из всех циклов выберем тот, в который мы придём, начав из первого номера первого этажа. Этот цикл будем называть *главным.* Заметим, что если мы переселим каждого математика в главном цикле в следующий номер по циклу (в направлении ориентированных рёбер), то мы получим ещё одно корректное расселение. При этом сам главный цикл останется циклом — лишь поменяются направления всех его рёбер. Математики вне цикла остались на месте, поэтому остальные рёбра сохранятся. Значит, если мы в новом расселении выберем главный цикл, он будет тем же самым (только с перевёрнутыми рёбрами). Применив переселение ещё раз, мы вернёмся в исходное расселение.

Таком образом, каждое расселение сопоставлено другому, причём сопоставление взаимно. Такое сопоставление разбивает все расселения на пары, откуда следует, что их чётно.

Другое решение. Приведём решение, использующее линейную алгебру. Во избежание перегрузки слова «номер» будем называть гостиничные номера *комнатами.*

Занумеруем математиков числами от 1 до ab; комнаты тоже занумеруем числами от 1 до ab, причём так, чтобы этажи соответствовали последовательным блокам чисел. Построим матрицу M размера $ab \times ab$, где число $M_{i,j}$ в i-й строке и j-м столбце определяется следующим образом:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-му математику нравится } j\text{-я комната;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расселение можно представить как перестановку $\sigma \in S_{ab}$ (т. е. функцию $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, ab\} \to \{1, 2, \ldots, ab\}$), сопоставляющую номеру математика номер комнаты. Тогда количество подходящих расстановок равно перманенту матрицы M:

$$\operatorname{perm}(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left(\prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Действительно, если данная перестановка σ подходит, то все сомножители $M_{i,\sigma(i)}$ будут равны 1, а если не подходит, то хотя бы один из сомножителей равен 0.

Так как нас интересует только чётность выражения, то можно произвольно менять знаки перед слагаемыми. Заменив знак перед каждым произведением на чётность перестановки $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$, получим определитель матрицы M:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Теперь заметим, что векторная сумма b столбцов матрицы, соответствующих комнатам первого этажа, равна столбцу из единиц, так как у каждого математика есть ровно одна комната на этом этаже, которая ему нравится. Такая же сумма у b столбцов матрицы, соответствующих второму этажу. Следовательно, столбцы матрицы линейно зависимы, то есть она вырожденная; а так как определитель любой вырожденной матрицы равен нулю, то он чётен. □