

6 класс

Задача 1. Маша каждый день читает одинаковое количество страниц. В понедельник она прочитала две трети «Капитанской дочки», во вторник — закончила «Капитанскую дочку» и осилила половину «Ревизора», а в среду — дочитала «Ревизора» и прочитала четверть «Героя нашего времени». В «Герое нашего времени» 200 страниц. А сколько страниц в «Капитанской дочке»?

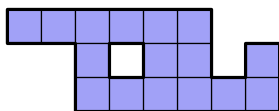
[4 балла]

(И. Русских)

Ответ. 150.

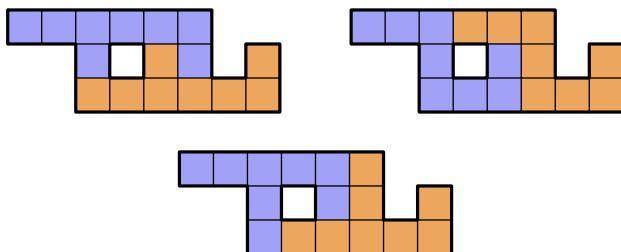
Решение. И во вторник, и в среду Маша прочитала по половине «Ревизора», но во вторник ещё треть «Капитанской дочки», а в среду четверть «Героя нашего времени». Значит, треть «Капитанской дочки» равна по длине четверти «Героя нашего времени», то есть 50 страницам. Поэтому в «Капитанской дочке» 150 страниц.

Задача 2. Разрежьте фигуру на две одинаковые части тремя различными способами.



[до 6 баллов] (С. Маркелов)

Ответ. См. рисунок.



Комментарий. Симметричную фигуру — например, квадрат или круг — нетрудно разрезать на две равные части многими

способами. У фигуры из задачи нет ни центра симметрии, ни оси симметрии, но тем не менее ее можно разрезать на две равные части тремя способами. Вы можете попробовать придумать фигуру, у которой нет ни центра, ни оси симметрии, но которую можно разрезать на две равные части четырьмя способами (одно из решений можно найти в статье «**Четырьмя различными способами**» в журнале «Квантик» №7 за 2018 год).

Задача 3.

Ваня: Таня, какой у тебя номер телефона?

Таня: А ты отгадай! Это 10-значное число. В нём встречаются все цифры, кроме одной.

Ваня: Ну, таких чисел много...

Таня: Но оно очень красивое! Смотри: если стереть две его последние цифры, оставшееся число разделится на 2, если стереть три последние цифры — разделится на 3, и т. д., если стереть 9 последних цифр — разделится на 9.

Ваня (подумав): Что-то у меня всё равно несколько вариантов получается...

Таня: А если ничего не стирать, тогда на 11 разделится!

Ваня: Вот теперь точно знаю!

Отгадайте и вы Танин номер телефона. Напишите, как вы рассуждали. [**6 баллов**] (*М. Евдокимов, А. Хачатурян*)

Ответ. 9660528471.

Решение. Будем решать задачу с конца. Если стереть 9 последних цифр, останется одна цифра, которая должна делиться на 9. Так как с нуля число начинаться не может, то первая цифра — девятка. Если стереть 8 последних цифр, то останется двузначное число, начинающееся с 9, которое делится на 8, — это только 96. Если стереть 7 последних цифр, то останется трёхзначное число, которое начинается с 96 и делится на 7, — это только 966. Шестёрки повторились, значит, все остальные цифры должны быть разными и отличными от 6 и 9. Действуем далее таким же образом — к известному началу числа приписываем по цифре (неизвестную цифру обозначим звёздочкой), чтобы соблюдалось очередное условие делимости.

Число 966* должно делиться на 6, из 9660 и 9666 годится только 9660.

Число 9660* должно делиться на 5, из 96600 и 96605 годится только 96605.

Число 96605* должно делиться на 4, из 966052 и 966056 годится только 966052.

Число 966052* должно делиться на 3, из 9660522, 9660525 и 9660528 годится только 9660528.

Число 9660528* должно делиться на 2, у нас осталась только одна незанятая чётная цифра, выбираем 96605284.

Осталось дописать две различные цифры, причём использовать мы можем только 1, 3 и 7. Число 9660528471 делится на 11 ($9660528471 = 11 \cdot 878229861$), остальные же возможные числа 9660528413, 9660528417, 9660528431, 9660528437 и 9660528473 отличаются от 9660528471 на 58, 54, 40, 34 и 2 соответственно, так что делиться на 11 не будут.

Делимость на 11 можно проверить, просто разделив в столбик, но можно и воспользоваться признаком делимости на 11: чтобы проверить, делится ли многозначное число на 11, находят сумму цифр, стоящих на нечётных местах, и сумму цифр, стоящих на чётных. Если разность этих двух сумм делится на 11, то делится и само число. Например, в Танином номере сумма цифр на нечётных местах равна $9 + 6 + 5 + 8 + 7 = 35$, а на чётных $6 + 0 + 2 + 4 + 1 = 13$. Разность $35 - 13 = 22$ делится на 11, значит, и 9660528471 тоже.

Задача 4. Алисе, профессору Селезнёву и капитану Зелёному подарили торт в виде прямоугольного параллелепипеда. Каждый из них отрезал себе по куску толщиной 10 см параллельно одной из граней (то есть отступив от края 10 см с той стороны, с которой захотел) — сначала это сделала Алиса, затем профессор, потом капитан. В итоге Алисе досталась треть торта, профессору — шестая часть, а капитану — пятая. Какие размеры имел торт изначально? **[7 баллов]** (*И. Русских*)

Ответ. 30 см, 40 см, 25 см.

Решение. Алиса, отрезав кусок толщиной 10 см, получила треть торта. Значит, одна из сторон, поперёк кото-

рой она резала, была равна 30 см, а теперь равна 20 см. Профессор не мог отрезать кусок в том же направлении, что и Алиса, иначе он тоже получил бы треть торта. Значит, он резал поперёк какой-то другой стороны. Полученная им одна шестая торта составляет от оставшихся двух третей $1/6 : 2/3 = 1/4$, так что его 10 см составили четверть от этой стороны, а вся сторона равнялась 40 см, а теперь равна 30 см.

Для капитана Зелёного осталась $1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$ часть торта со сторонами 20 см, 30 см и ещё одной, пока не известной. Капитану от оставшегося куска достались $1/5 : 1/2 = 2/5$, то есть сторона, поперёк которой он отрезал, была равна $10 : 2/5 = 25$ см. Это не совпадает ни с 20 см, ни с 30 см, так что это именно третье измерение, которое нам оставалось найти.

Задача 5. Кощею достались шесть сундуков с золотыми монетами. Всего монет 300, и Кощей знает, сколько монет в каком сундуке лежит. За один ход Кощей выбирает любой набор сундуков (но не все шесть), общее количество монет в которых позволяет распределить их по выбранным сундукам поровну. Затем он уравнивает количества монет в выбранных сундуках, перекладывая монеты между ними.

Всегда ли Кощей может за несколько ходов добиться, чтобы во всех шести сундуках стало поровну монет?

[8 баллов] (И. Русских)

Ответ. Всегда.

Первое решение. Среди шести чисел есть два числа одной чётности. Возьмём два соответствующих сундука и уравнием количество монет в них. Среди оставшихся четырёх сундуков также есть два, где количество монет одной чётности. Уравнием количество монет и в них. Поскольку общее число монет чётно, то в двух оставшихся сундуках суммарное число монет тоже чётно. Уравняв число монет в них, получим три пары равных чисел. Если взять по одному сундуку из каждой пары, то в них в сумме будет 150 монет. Уравнием количество монет в этих сундуках, а затем и в трёх оставшихся.

Второе решение. Можно было рассуждать иначе, начав с делимости на 3. Легко убедиться, что сумма трёх чисел делится на 3, если и только если их остатки при делении на 3 либо все разные, либо все одинаковые. Так как сундуков шесть, а остатков всего три, обязательно найдутся три сундука, суммарное число монет в которых кратно 3. Уравняем количество монет в найденной тройке и в трёх оставшихся сундуках (общее количество монет в них также будет кратно 3, поскольку число монет во всех сундуках кратно 3). После этого разобьём сундуки на пары: один из первой тройки и один из второй. Суммарное число монет в каждой паре одинаково, а значит, равно $300 : 3 = 100$, то есть каждую пару Кощей сможет уравнивать, и во всех шести сундуках станет по 50 монет.

Комментарий. Отметим, что в приведённых решениях не используется уравнивание монет в четырёх или пяти сундуках. Заметим также, что аналогичным образом можно решить задачу, где у Кощей вместо шести имеется любое другое составное число сундуков (лишь бы суммарное количество монет делилось на количество сундуков).

Задача 6. Есть трое песочных часов: большие на 5 минут, средние на 3 минуты и маленькие на 2 минуты. Но в одних из них песка чуть больше, чем надо, и он сыплется на несколько секунд дольше, чем положено. Как найти бракованные часы, затратив меньше пяти минут? (Считаем, что на запуск и переворачивание часов время не тратится.)

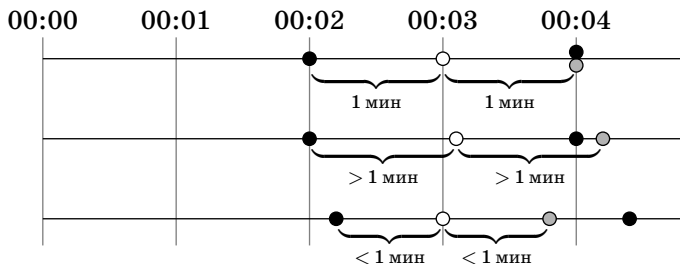
[9 баллов] (Т. Казыцына)

Решение. Рассмотрим следующий алгоритм:

1. Запустим одновременно часы на 2 и на 3 минуты.
2. Как только весь песок в часах на 2 минуты будет внизу, перевернём их и одновременно с этим запустим часы на 5 минут.
3. Как только весь песок в часах на 3 минуты будет внизу, перевернём часы на 5 минут (чтобы уже насыпавшийся песок высыпался обратно).

Дальше будем следить, в каких часах песок кончится раньше: в 2-минутных или в 5-минутных.

Пусть мы начали шаг 1 в 00:00.



Если бракованными были часы на 5 минут, то шаг 2 начнётся в 00:02, а шаг 3 — в 00:03 (верхняя линия на схеме). В этот момент 2-минутные и 5-минутные часы отмеряют по 1 минуте, и после шага 3 закончат одновременно (в 00:04).

Если бракованными были часы на 3 минуты, то часы на 5 минут запустятся ровно в 00:02, но перевернём обратно мы их позже, чем в 00:03 (средняя линия на схеме). То есть в начале шага 3 в 2-минутных часах сверху будет песка меньше, чем на минуту, а в 5-минутных снизу — больше, и после переворачивания 5-минутные часы «финишируют» позже, чем 2-минутные (причём 2-минутные закончат ровно в 00:04).

Если бракованными были часы на 2 минуты, то часы на 5 минут запустятся позже, чем в 00:02, то есть до переворачивания их в 00:03 пройдёт меньше одной минуты (нижняя линия на схеме). Значит, после переворачивания песок в них закончится раньше, чем в 2-минутных часах (и раньше, чем в 00:04).

Так по результату наблюдений мы поймём, какие часы неисправны, потратив не более 4 минут.

Комментарий. Если бы не было ограничения по времени, можно было отмерить 6 минут с помощью маленьких («2») и с помощью средних («3») часов и сравнить результат:

- «2» + «2» + «2» > «3» + «3» — 2-минутные часы бракованные,
- «2» + «2» + «2» < «3» + «3» — 3-минутные часы бракованные,
- «2» + «2» + «2» = «3» + «3» — 5-минутные часы бракованные.

Но шести минут у нас нет. Как можно уменьшить это время?

Вычтем из обеих частей «2»:

$$\langle 2 \rangle + \langle 2 \rangle ? \langle 3 \rangle + \langle 3 \rangle - \langle 2 \rangle.$$

В точности такое сравнение и приведено в решении. Разность «3»–«2» мы «запомнили» на 5-минутных песочных часах.