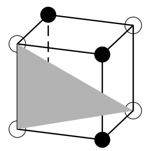
7 класс

Задача 1. См. задачу 1 для 6 класса (с. 3).

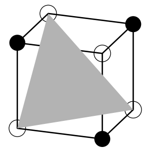
Задача 2. Каждую вершину куба окрасили в чёрный или белый цвет. Обязательно ли найдётся равнобедренный треугольник, все вершины которого одного цвета? (Учитываются и треугольники, не лежащие в одной грани куба.)

[*4 балла*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. Не обязательно, см. рисунок сверху.



Комментарии. 1. В примере на рисунке вершины одного цвета образуют прямоугольник, не являющийся квадратом. А значит, любой одноцветный треугольник — неравнобедренный прямоугольный треугольник.



2. Объясним, как можно найти решение и доказать, что оно единственно (с точностью до поворотов куба). Если среди соседних вершин куба нет одноцветных, то получается раскраска на рисунке внизу, в которой есть одноцветный равносторонний треугольник: со сторонами, являющимися диагоналями граней. Если же в какой-то грани есть две соседние вершины одного цвета, то, чтобы в ней не было одноцветных равнобедренных треугольников, две оставшиеся вершины в этой грани должны быть другого цвета — как на передней грани на верхнем рисунке. Но теперь можно применить то же рассуждения к левой и к правой граням и восстановить раскраску всех вершин.

3. Есть много интересных вопросов о существовании равнобедренных треугольников с вершинами одного цвета при произвольной раскраске какого-нибудь набора точек. Например, такой треугольник существует для любой раскраски точек окружности в два цвета (докажите) или в любое конечное число цветов (это уже непросто доказать).

Задача 3. Найдите какое-нибудь решение ребуса

$$\text{К,ОН} \cdot \text{Ф,ЕТ} = \text{А}.$$

Разным буквам соответствуют разные цифры; числа с запятой не должны оканчиваться на 0. **[*6 баллов*]**

(*Т. Казицына, П. Закорко*)

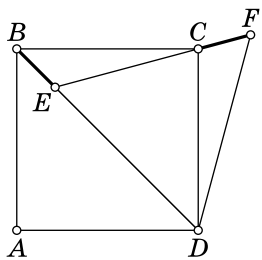
Ответ. $0{,}48 \cdot 6{,}25 = 3$ или $6{,}25 \cdot 0{,}48 = 3$.

Комментарий. Объясним, как можно искать решение. Для начала домножим левую и правую часть на 10000, получим

$$\text{КОН} \cdot \text{ФЕТ} = 10000 \cdot \text{А}$$

(возможно, К или Ф равно нулю). Числа слева не могут делиться на 10 (они не оканчиваются на ноль). Поскольку $10000 = 2^4 \cdot 5^4$, то один из множителей делится на $2^4 = 16$, а другой на $5^4 = 625$. Так как единственное число, не большее 1000 и кратное 625, равно 625, то один из множителей слева (например, КОН) равен 625. Осталось подобрать второй множитель, он должен делиться на 16. Подходит $\text{Ф,ЕТ} = 0{,}48$, получаем решение $6{,}25 \cdot 0{,}48 = 3$. Легко проверить, что это решение единственно с точностью до перестановки множителей.

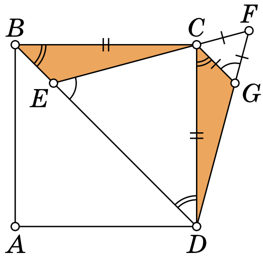
Задача 4. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник DEF расположены так, как показано на рисунке (точка E лежит на диагонали BD, точка C лежит на стороне EF). Докажите, что $BE = CF$.



[*7 баллов*] (*М. Евдокимов*)

Первое решение. В треугольниках BCE и CDF стороны BC и CD равны (как стороны квадрата), но всё же эти треугольники не равны: в одном из них против стороны квадрата лежит угол 120°, а во втором 60°.

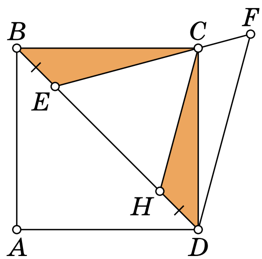
Отметим на отрезке FD такую точку G, что $FG = FC$. В треугольнике CFG две стороны равны и есть угол 60°, поэтому он равносторонний и все его углы по 60° (см. рис.).



Треугольники BCE и CDG уже больше похожи на равные, в частности, углы E и G оба равны внешнему углу правильного треугольника (т. е. $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$).

Заметим, что в них есть и ещё одна пара равных углов: $\angle EBC = 45^\circ$ как угол между диагональю и стороной квадрата, но и угол DCG равен углу CDE (ведь CG и ED параллельны), который является углом между диагональю и стороной квадрата. Значит, равны и оставшиеся углы этих треугольников, и вообще эти треугольники равны (по стороне и прилежащим углам). В частности, $BE = CG$. Ну а $CG = CF$ как стороны равностороннего треугольника CFG.

Второе решение. Отложим на BD от точки D отрезок $DH = BE$ (см. рис.). Вместо того, чтобы сравнивать отрезки



CF и BE, сравним $EC = EF - CF$ и $EH = DE - DH = EF - BE$. Рассмотрим треугольники BCE и DCH: $BC = DC$ как стороны квадрата, $BE = DH$ по построению, и углы EBC и EDC равны как углы между диагональю и стороной квадрата.

Значит, эти треугольники равны, и $EC = EH$. В равнобедренном треугольнике ECH угол CHE равен 60°, значит, и все его углы равны по 60°, а $EH = EC$, откуда $EF - CF = DE - DH = EF - BE$ и $BE = CF$.

Комментарий. Можно решить задачу и начиная с других дополнительных построений — например, проведя через точку E прямую, параллельную AD.

Задача 5. Наиль расставляет в клетках квадрата 6×6 числа от 1 до 36 (по одному числу в каждую клетку, числа не повторяются). После этого Наиль ставит фишку в клетку с числом 1. Далее перед каждым ходом Наиль выбирает наибольшее из чисел, стоящих в соседних с фишкой (по стороне или углу) клетках. Если выбранное число больше, чем в клетке с фишкой, то Наиль передвигает фишку в клетку с выбранным числом; иначе фишка больше не двигается.

а) Приведите пример расстановки чисел, при которой фишка посетит как можно больше клеток. **[*3 балла*]**

б) Докажите, что ни при какой другой расстановке чисел не получится посетить больше клеток. **[*4 балла*]**

(*И. Ященко*)

Решение. а) Расстановка чисел, при которой путь фишки пройдёт по 18 клеткам, приведён на рисунке.

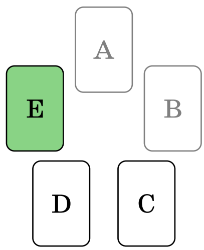
11	12	14	16	18	19
10	9	13	15	17	20
8	7	35	36	21	22
6	5	34	33	23	24
4	3	32	29	25	26
1	2	31	30	28	27

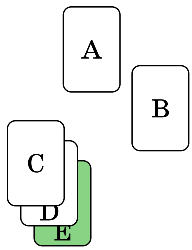
б) Заметим, что в каждом квадрате 2×2 фишка может посетить не больше двух клеток. Действительно, пусть в каком-то квадрате 2×2 фишка сначала посетила число A, потом через некоторое время — число B, большее A, а потом — число C, большее B. Но клетка с C — соседняя с клеткой с A, поэтому, находясь в клетке с A, фишка должна была шагнуть в клетку с числом C (или с большим числом), и посетить клетку с числом B она бы не могла. Противоречие.

Разделив квадрат 6×6 на 9 квадратиков 2×2, получаем, что в каждом из них посещено не более двух клеток, поэтому суммарно фишка посетит не более 18 клеток.

Задача 6. Петя и Вася хотят показать следующий фокус. У зрителей есть пять карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5. Две из них они отдают Пете, две — Васе, а одну оставляют себе. Сначала Петя называет число на одной из своих карточек, затем Вася называет число на одной из своих, после чего Петя должен назвать число на карточке у зрителей. Как договориться Пете и Васе, чтобы фокус всегда удавался? [*9 баллов*] (*А. Грибалко*)

Первое решение. Расположим мысленно карточки по кругу в порядке 1, 2, 3, 4, 5. Если двигаться по часовой стрелке, то от одной из карточек Пети до другой нужно сделать не более двух шагов. Обозначим вторую из них E, пусть Петя назовёт число на ней, тогда первая его карточка — C или D (см. левый рисунок).





Соберём мысленно карточки C, D, E в одну стопку (отметим, что в этой стопке две карточки Пети). Карточки Васи лежат в двух из трёх стопок (см. правый рисунок) и от одной до другой можно дойти за шаг по часовой стрелке. Пусть и Вася назовёт число на второй из своих карточек.

Теперь Петя знает обе Васины карточки. Действительно, он знает, в каких стопках они лежат на правом рисунке. И даже если одна из Васиных карточек в стопке C-D-E, то Петя может понять, какая именно, потому что в этой стопке только одна карточка не Петина.

Второе решение. Всего вариантов пар карточек у Пети $(5\cdot 4):2=10$, а отдельных карточек 5. Чтобы фокус удался, нужно закодировать варианты так, чтобы называемому Петей числу соответствовали ровно два варианта пар. Это можно сделать так:

Пары карточек у Пети	Петя называет
1, 5 или 1, 4	1
1, 2 или 2, 5	2
1, 3 или 2, 3	3
2, 4 или 3, 4	4
3, 5 или 4, 5	5

Теперь по названному Петей числу Вася может выяснить два варианта оставшегося Петиного числа. Обозначим наименьшее из возможных вторых Петиных чисел как A, наибольшее из них — B, наименьшее из двух оставшихся чисел — C, наибольшее из оставшихся — D.

Поскольку одно из чисел A, B — у Пети, возможно 5 вариантов того, какие две карточки у Васи; пусть он назовет число в соответствии с таблицей:

Карточки Васи	Вася называет	У зрителей
A, C	C	D
B, C	C	D
C, D	D	A или B (та, которая не у Пети)
A, D	A	C
B, D	B	C

Так по ходу Васи Петя сможет понять, карточка с каким числом осталась у зрителей.

Комментарий. Правильный ход Пети по существу единственен (получается способом, описанным в первом решении при выкладывании карточек в каком-то порядке), а два приведённых решения — это два разных описания одного и того же по сути алгоритма.