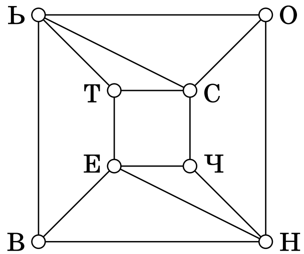
7 класс в Математической вертикали

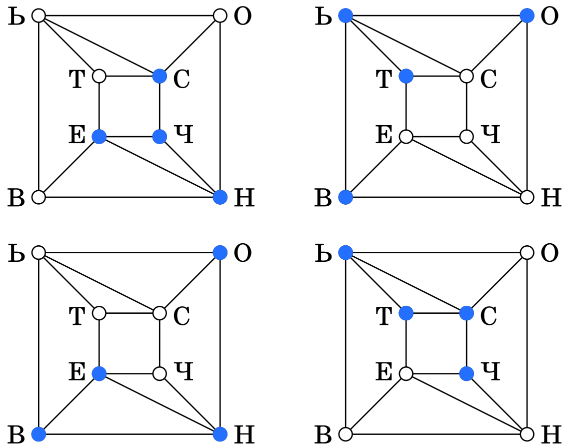
Задача 1. В снежном королевстве 8 городов, соединённых дорогами как на рисунке. Королева хочет раскрасить 4 города в синий цвет, а 4 оставить белыми так, чтобы из города В в город О можно было доехать, двигаясь из каждого города только в город другого цвета, а из Ь в Ч так доехать было бы нельзя. Помогите ей это сделать.



[*4 балла*]

(*Т. Голенищева-Кутузова*)

Ответ. Подходят только четыре раскраски, см. рисунки. В первых двух в город Ч просто невозможно попасть: он соединён только с городами такого же цвета.



Задача 2. См. задачу 1 для 6 класса (с. 3). **[*4 балла*]**

Задача 3. У Тани есть 20 кубиков и 26 шариков, каждый из них жёлтый или зелёный, лёгкий или тяжёлый. Лёгкая игрушка — обязательно шарик. Жёлтых игрушек столько же, сколько лёгких. Зелёных игрушек 37. А сколько тяжёлых шариков? **[*5 баллов*]**

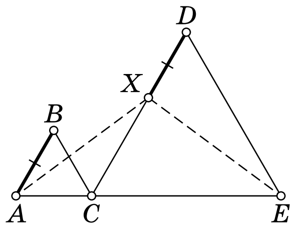
(*жюри по мотивам задачи С. Дориченко*)

Ответ. 17.

Решение. Всего игрушек $20+26=46$. Из них 37 — зелёные, значит, жёлтых $46-37=9$. Жёлтых и лёгких игрушек поровну, поэтому лёгких игрушек тоже 9. Все лёгкие игрушки — шарики, т. е. лёгких шариков — 9. Значит, остальные шарики тяжёлые — их $26-9=17$.

Задача 4. См. задачу 3 для 7 класса (с. 10). **[*6 баллов*]**

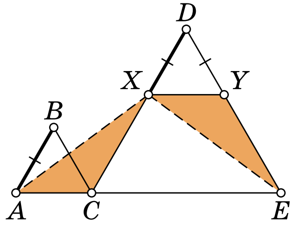
Задача 5. Равносторонние треугольники ABC и CDE расположены, как показано на рисунке (точка C лежит на отрезке AE). На отрезке CD выбрана такая точка X, что $XD=AB$. Докажите, что $AX=XE$.



[*8 баллов*]

(*М. Евдокимов, Т. Казицына, Е. Чернышева*)

Решение. Отметим на стороне DE такую точку Y, что $DY=DX$. Поскольку угол XDE равен 60°, равнобедренный треугольник XDY также будет равносторонним.

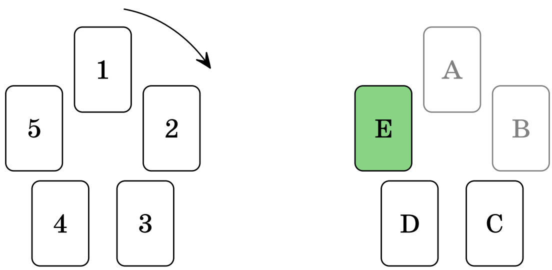


Рассмотрим треугольники AXC и XEY. Имеем $AC = AB = XD = XY$, а также $XC = DC - XD = DE - DY = EY$. Осталось заметить, что углы ACX и EYX равны: оба они — смежные с углами равносторонних треугольников, а значит, $\angle ACX = \angle EYX = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Таким образом, треугольники AXC и XEY равны по двум сторонам и углу между ними и, следовательно, $AX = XE$.

Задача 6. Петя и Вася хотят показать следующий фокус. У зрителей есть пять карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5. Две из них зрители отдают Пете, одну — Васе, а две оставляют себе. Затем Петя называет число на одной из своих карточек (по своему выбору), после чего Вася должен угадать одно из чисел, которые есть на руках у зрителей. Как договориться Пете и Васе, чтобы фокус всегда удавался?

[*9 баллов*] (*А. Грибалко, И. Русских*)

Решение. Расположим мысленно карточки по кругу в порядке 1, 2, 3, 4, 5. Карточки Пети на этом круге могут либо лежать рядом, либо не рядом, но тогда с одной из сторон между ними лежит всего одна карточка.



Т. е. если двигаться по часовой стрелке — от одной из карточек Пети до другой нужно сделать не более двух шагов. Обозначим вторую из них E, и пусть Петя назовёт число на ней. Услышав это число, Вася будет знать, что вторая Петина карточка — одна из двух «предыдущих»: D или C — см. рисунок.

Хотя бы одна из двух карточек A и B не у Васи — значит, она у зрителей, и, назвав соответствующее число, Вася успешно завершит фокус.