Заключительный этап. 10 класс

Решения задач

Задача 1. В инструкции к лекарству написано, что возможны следующие побочные эффекты:
- часто (с вероятностью от 1/100 до 1/10) – головная боль;
- нечасто (от 1/1000 до 1/100) – тошнота;
- редко (от 1/10000 до 1/1000) – вазомоторное расстройство.

Считая, что эти данные точны и что различные побочные эффекты независимы, найдите промежуток, в котором содержится вероятность того, что у пациента не будет никаких побочных эффектов. Границы интервала округлите до тысячных.

Ответ: от 0,890 до 0,989.

Решение. Вероятности событий «*нет головной боли*», «*нет тошноты*» и «*нет вазомоторных расстройств*» обозначим p_1, p_2 и p_3 соответственно. Тогда событие A «*нет побочных эффектов*» имеет вероятность

$$\mathrm{P}(A) = p_1 p_2 p_3.$$

Из условия следует, что

$$0{,}9 \le p_1 \le 0{,}99 \le p_2 \le 0{,}999 \le p_3 \le 0{,}9999.$$

Поэтому ,

$$0{,}9 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}999 \le \mathrm{P}(A) \le 0{,}99 \cdot 0{,}999 \cdot 0{,}9999,$$

откуда

$$0{,}890109 \le \mathrm{P}(A) \le 0{,}988911099.$$

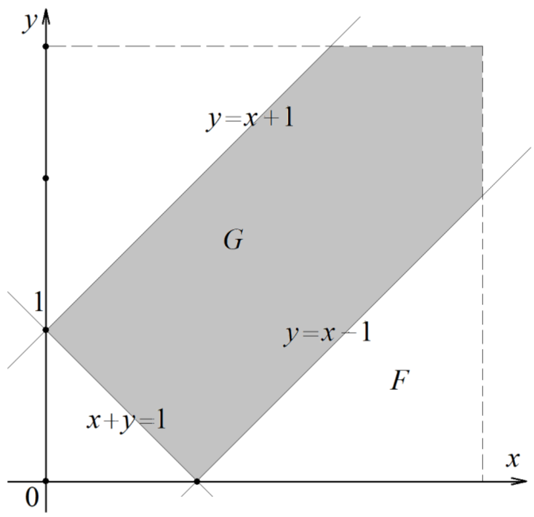
Задача 2. У Рассеянного Ученого было число 1. При помощи генератора случайных чисел независимо друг от друга Ученый выбирает еще два случайных действительных числа из отрезка $[0; 3]$. Какова вероятность того, что можно будет построить треугольник, длины сторон которого равны трем имеющимся у Ученого числам?

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Представим выбор случайных чисел x и y как выбор случайной точки $M(x; y)$ из квадрата F $[0; 3]\times[0; 3]$. Вероятность события G «*существует треугольник со сторонами* 1, x *и* y» равна отношению площади фигуры G к площади квадрата F, где фигура G определяется неравенствами треугольника:

$$\begin{cases} 1 < x + y, \\ 1 > |x - y|. \end{cases}$$

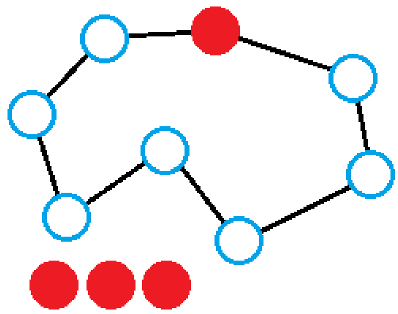
Сделаем чертеж.



$$\mathrm{P}(G) = \frac{S_G}{S_F} = \frac{9 - 4 - 1/2}{9} = \frac{1}{2}.$$

Задача 3. У Вали в коробке n синих и $k \le n$ красных бусин. Она вынимает все бусины по очереди в случайном порядке, нанизывает их на нитку и связывает концы нитки. Найдите вероятность того, что в получившемся ожерелье никакие две красные бусины не окажутся рядом.

Ответ: $\dfrac{n!(n-1)!}{(n-k)!(n+k-1)!}$.

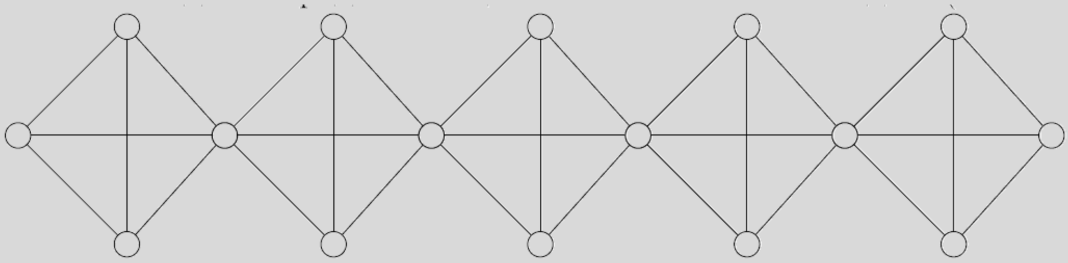


Решение. Порядок бусин по условию случаен. Поэтому можно вообразить, что Валя уже нанизала все синие бусины и одну красную. Тем самым случайный опыт сводится к тому, что Валя случайным образом по очереди «вставляет» оставшиеся красные бусины в промежутки между уже нанизанными.

Между нанизанными бусинами $n+1$ промежутков, из них $n-1$ промежутков ограничены синими бусинами. В силу случайности вторая красная бусина окажется между синими с вероятностью $\dfrac{n-1}{n+1}$. Теперь получилось $n+2$ промежутков, из которых $n-2$ между синими бусинами. Поэтому третья красная бусина окажется между синими с вероятностью $\dfrac{n-2}{n+2}$. И так далее. Последняя красная бусина окажется между синими с вероятностью $\dfrac{n-k+1}{n+k-1}$. Искомая вероятность равна

$$\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n+k-1} = \frac{n!(n-1)!}{(n-k)!(n+k-1)!}.$$

Задача 4. Города и дороги в Анчурии образуют граф, показанный на рисунке.



Когда в Анчурию приходит сезон дождей, ливни размывают часть дорог, причем каждая дорога размывается с вероятностью $p = 0,5$ независимо от других дорог. Какова вероятность того, что из любого города в любой другой по-прежнему можно будет проехать по неразмытым дорогам?

Ответ: $\left(\dfrac{19}{32}\right)^5$ или приближенно 0,074.

Решение. Представим граф как объединение пяти полных графов K_4 (квадратов с диагоналями). Чтобы граф K_4 перестал быть связным, должно произойти одно из двух событий.

1. Удалены ровно 3 ребра, примыкающие к одной вершине (если удалить 3 ребра, не примыкающие к одной вершине, то в графе останется дерево, соединяющее все четыре вершины). Вероятность удаления ровно 3 ребер, примыкающих к одной вершине, равна $4p^3(1-p)^3=\frac{1}{16}$.

2. Удалены 4 или 5 любых ребер или все 6 ребер – в этом случае оставшиеся ребра не могут связать четыре вершины. Вероятность такого события равна

$$15p^4(1-p)^2+6p^5(1-p)+p^6=\frac{11}{32}.$$

Полная вероятность того, что квадрат потерял связность, равна $\frac{1}{16}+\frac{11}{32}=\frac{13}{32}$, а вероятность противоположного события «*квадрат остался связным графом*» $\frac{19}{32}$.

Чтобы весь граф дорог оставался связным, нужно, чтобы связным остался каждый квадрат. Вероятность этого равна

$$\left(\frac{19}{32}\right)^5\approx 0{,}074.$$

Задача 5. В тесте 20 вопросов, на каждый из которых можно ответить «да» или «нет». За каждый верный ответ Коля получает 1 балл. Коля отвечает на вопросы до тех пор, пока на очередной вопрос он не ответит неправильно: при первой же ошибке тест завершается.

Всего у Коли 10 попыток сдать тест. В каждой следующей попытке ни вопросы, ни их порядок не меняются. Так продолжается до тех пор, пока Коля не ответит верно на все вопросы или не исчерпает все попытки.

На все вопросы Коля отвечает наугад, поскольку ответов он не знает. Зато он пользуется информацией, полученной в предыдущих попытках: если с первого раза Коля не угадал ответ на новый для себя вопрос, то в следующей попытке он ответит на него верно.

а) Какое наименьшее гарантированное количество баллов получит Коля?

б) Что более вероятно: что Коля получит 20 баллов или что он получит меньше 20 баллов?

Ответ: а) 9 баллов; б) более вероятно событие «*менее 20 баллов*».

Решение. Если с первой попытки Коля отвечает неверно на первый вопрос, то со второй он ответит на него верно. При этом, если он неверно ответит на второй вопрос, то ответит на него верно с третьей попытки и так далее. Значит, гарантированное число верных ответов на единицу меньше числа попыток, то есть 9.

Последовательность вопросов представим как серию испытаний Бернулли. Если на вопрос Коля сразу угадал ответ, будем считать такое испытание успешным, в противном случае – неудачным. Коля получит 20 баллов, только если в серии из 20 испытаний-вопросов не более 9 неудач.

Вероятность события A «20 *баллов*» равна

$$\mathrm{P}(A)=\left(C_{20}^0+C_{20}^1+\ldots+C_{20}^9\right)\cdot\frac{1}{2^{20}}.$$

Число $C_{20}^0+C_{20}^1+\ldots+C_{20}^9$ равно числу $C_{20}^{11}+C_{20}^{12}+\ldots+C_{20}^{20}$, а если к сумме этих чисел добавить C_{20}^{10}, то получится 2^{20}. Значит, $C_{20}^0+C_{20}^1+\ldots+C_{20}^9=\frac{2^{20}-C_{20}^{10}}{2}$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}-\frac{C_{20}^{10}}{2^{21}}<\frac{1}{2}.$$

Задача 6. Ковбои Билл и Джо стреляют без промаха. Они решили посоревноваться в удачливости. Каждый зарядил свой 10-зарядный револьвер пятью боевыми патронами и пятью холостыми.

Билл и Джо одновременно стреляют каждый по своей мишени. Они стреляют до тех пор, пока хотя бы одна из мишеней не будет поражена. Если попал в свою мишень кто-то один – он победитель. Если попали оба, то объявляется ничья. После каждого выстрела барабан револьвера автоматически поворачивается на одно гнездо, подставляя под боек следующий патрон. Билл случайным образом раскручивает барабан своего револьвера перед каждым выстрелом, а Джо решил раскрутить свой барабан наудачу только перед первым выстрелом.

В каком порядке Джо должен зарядить холостые и боевые патроны в барабан своего револьвера, чтобы вероятность его победы стала наибольшей?

Ответ: Джо должен зарядить свой барабан, чередуя боевые и холостые патроны.

Решение . Пусть Джо уже раскрутил барабан, и патрон на позиции 1 готов к выстрелу. Но он не обязательно боевой. Обозначим p_k вероятность того, что первый боевой патрон у Джо находится на позиции k в барабане его револьвера. Здесь $k=1,2,\ldots,6$, при этом $p_1+\ldots+p_6=1$. Учитывая, что $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2\le\frac{1}{2}$ и $p_3+p_4+p_5+p_6=\frac{1}{2}-p_2$, оценим сверху вероятность события A «*Джо победит*»:

$$\mathrm{P}(A)=p_1\cdot\frac{1}{2}+p_2\cdot\frac{1}{4}+p_3\cdot\frac{1}{8}+\ldots+p_6\cdot\frac{1}{64}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{8}\left(p_3+\ldots+p_6\right)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-p_2\right)=\frac{5}{16}+\frac{1}{8}p_2\le\frac{5}{16}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

причем неравенство обращается в равенство при $p_2=\frac{1}{2}$.

Из $p_1=p_2=\frac{1}{2}$ следует, что в барабане Джо не должно быть двух холостых патронов подряд, иначе окажется, что $p_3>0$. Значит, Джо должен зарядить свой барабан, чередуя боевые и холостые патроны.

Авторы задач: А. Б. Акимов, И. Р. Высоцкий, Н. А. Шихова, А. В. Шкляев, И. В. Ященко