Заключительный этап. 11 класс

Решения задач

Задача 1. В инструкции к лекарству написано, что возможны следующие побочные эффекты:
- часто (вероятность от 1/100 до 1/10) – головная боль;
- нечасто (от 1/1000 до 1/100) – тошнота;
- редко (от 1/10000 до 1/1000) – вазомоторное расстройство.

Известно, что эти данные точны и что различные побочные эффекты независимы. Найдите интервал, в котором содержится вероятность того, что у пациента не будет никаких побочных эффектов. Границы интервала округлите до тысячных.

Ответ: от 0,890 до 0,989 с округлением до тысячных.

Решение. Вероятности событий «*нет головной боли*», «*нет тошноты*» и «*нет вазомоторных расстройств*» обозначим p_1, p_2 и p_3 соответственно. Тогда событие A «*нет побочных эффектов*» имеет вероятность

$$\mathrm{P}(A) = p_1 p_2 p_3.$$

Из условия следует, что

$$0{,}9 \le p_1 \le 0{,}99 \le p_2 \le 0{,}999 \le p_3 \le 0{,}9999.$$

Поэтому

$$0{,}9 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}999 \le \mathrm{P}(A) \le 0{,}99 \cdot 0{,}999 \cdot 0{,}9999,$$

откуда

$$0{,}890109 \le \mathrm{P}(A) \le 0{,}988911099.$$

Задача 2. В тесте бесконечно много вопросов, на каждый из которых можно ответить «да» или «нет». Коля отвечает на вопросы до тех пор, пока на очередной вопрос он не ответит неправильно: при первой же ошибке тест завершается.

Всего у Коли 10 попыток сдать тест. В каждой следующей попытке ни вопросы, ни их порядок не меняются. Так продолжается до тех пор, пока Коля не исчерпает все попытки.

Ответов Коля не знает и поэтому на все вопросы отвечает наугад. Зато он пользуется информацией, полученной в предыдущих попытках: если с первого раза Коля не угадал ответ на новый для себя вопрос, то в следующей попытке он ответит на него верно.

Найдите математическое ожидание числа вопросов, на которые Коля в конце концов ответит верно.

Ответ: 19.

Решение. Последовательность вопросов представим как серию независимых одинаковых испытаний. Если Коля сразу угадал ответ на вопрос, будем считать такое испытание успешным, в противном случае – неудачным. Поскольку у Коли 10 попыток, в серии, которая получится, ровно 10 неудач, необязательно подряд, но последнее испытание неудачно. Таким образом, задача сводится вопросу о математическом ожидании случайной величины X «*число испытаний в серии, которая проводится до десятой неудачи*». Количество вопросов, на которые Коля получит верный ответ, равно $\mathrm{E}X - 1$.

Пусть X_1 – количество испытаний до первой неудачи, X_2 – количество испытаний до второй неудачи после наступления первой, и так далее до величины X_{10}, которая равна числу испытаний до наступления 10-й неудачи после того, как 9 неудач уже случилось. Все эти величины имеют одинаковое геометрическое распределение $G(1/2)$, и их математические ожидания одинаковы: $\mathrm{E}X_1 = \ldots = \mathrm{E}X_{10} = 2$. Тогда

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}\right) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots + \mathrm{E}X_{10} = 20.$$

Задача 3. Рассеянный Ученый проводит собеседование со Студентом.
– Ну-с, молодой человек, проверим вашу везучесть. Я дам Вам число 1 и еще два совершенно случайных и независимых друг от друга числа из отрезка $[0\,;a]$, где $a > 0$. Я возьму Вас ассистентом, только если Вы построите треугольник, длины сторон которого равны трем имеющимся у Вас числам. Так и быть, число a Вы вольны выбрать сами.

Какое число должен назвать Студент, чтобы вероятность существования такого треугольника оказалась наибольшей?

Ответ: 1,5.

Решение. Рассмотрим выбор случайной точки $M(x;\, y)$ из квадрата F $[0;a]\times[0;a]$.

Если $a \le \dfrac{1}{2}$, то построение треугольника невозможно.

Если $a > \dfrac{1}{2}$, то вероятность события G «*существует треугольник со сторонами* 1, x *и* y» равна отношению площади фигуры G к площади квадрата F, где фигура G определяется неравенствами треугольника:

$$\begin{cases} 1 < x + y, \\ 1 > |x - y|. \end{cases}$$

Сделаем чертеж и найдем вероятность события G:

$$\mathrm{P}(G) = \frac{S_G}{S_F} = \frac{(2a-1)^2}{2a^2} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{a}\right)^2 \text{ при } \frac{1}{2} < a \le 1 \text{ (рис. 1)}$$

и

$$\mathrm{P}(G) = \frac{S_G}{S_F} = \frac{a^2 - 1/2 - (a-1)^2}{a^2} = \frac{2}{a} - \frac{3}{2a^2} \text{ при } a > 1 \text{ (рис. 2).}$$

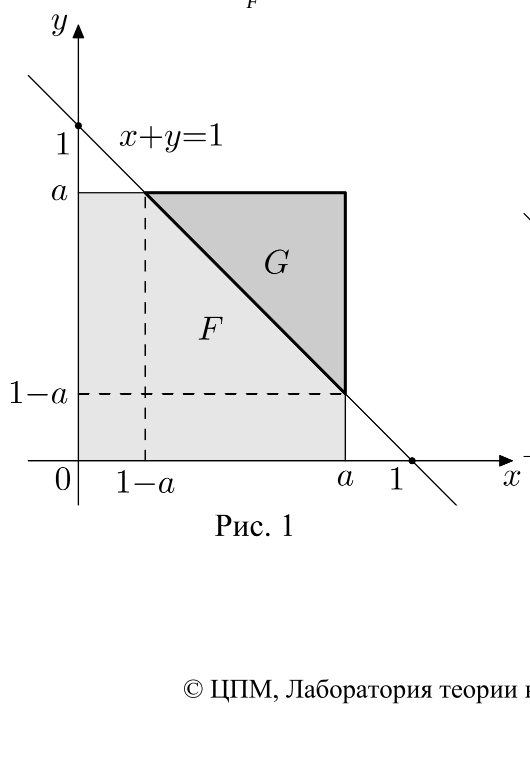


Рис. 1

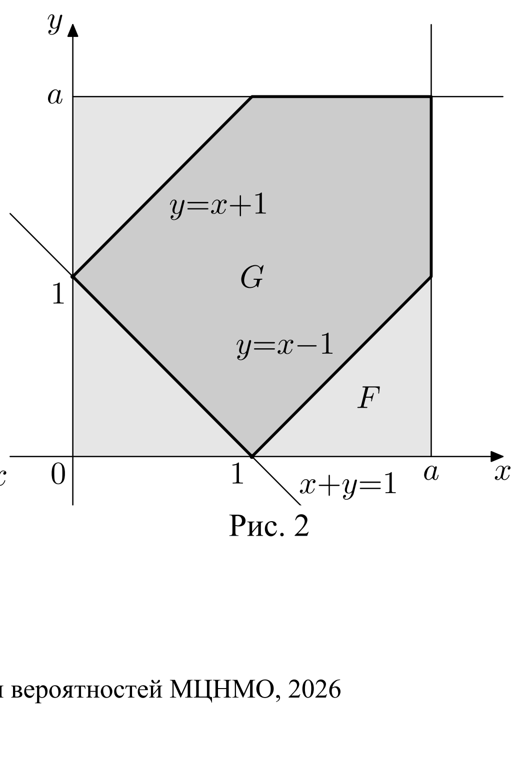


Рис. 2

Сделаем замену $\dfrac{1}{a} = z$. Нужно найти наибольшее значение функции

$$p(z) = \begin{cases} -1,5z^2 + 2z, \text{ если } 0 < z < 1, \\ 0,5(z-2)^2, \text{ если } 1 \le x < 2, \\ 0, \text{ если } z \ge 2, \end{cases}$$

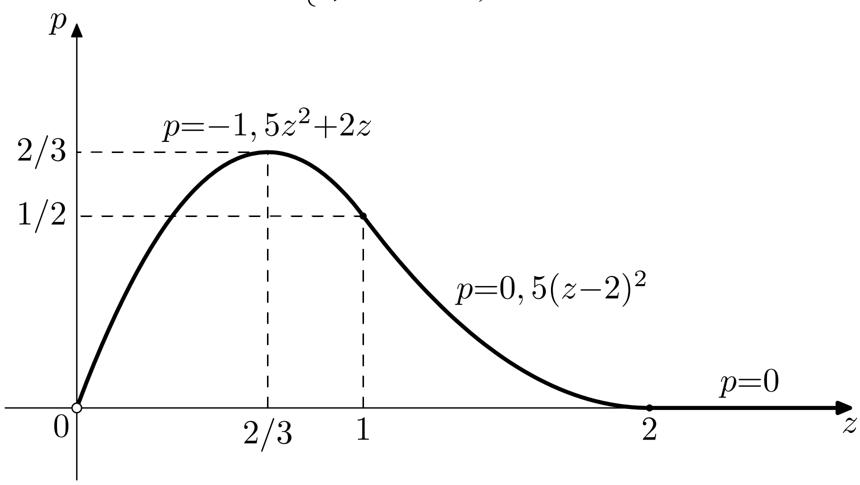


Рис. 3

график которой состоит из фрагментов двух парабол и луча (рис. 3). Несложно убедиться, что наибольшее значение функции $p(z)$ равно $\dfrac{2}{3}$ и достигается в единственной точке $z = \dfrac{2}{3}$ (рис. 3). Следовательно $a = \dfrac{3}{2}$.

Задача 4. Ковбои Билл и Джо стреляют без промаха. Они решили посоревноваться в удачливости. Каждый зарядил свой 10-зарядный револьвер пятью боевыми патронами и пятью холостыми.

Билл и Джо одновременно стреляют каждый по своей мишени. Они стреляют до тех пор, пока хотя бы одна из мишеней не будет поражена. Если попал в свою мишень кто-то один – он победитель. Если попали оба, то объявляется ничья. После каждого выстрела барабан револьвера автоматически поворачивается на одно гнездо, подставляя под боек следующий патрон. Билл случайным образом раскручивает барабан своего револьвера перед каждым выстрелом, а Джо решил раскрутить свой барабан наудачу только перед первым выстрелом.

В каком порядке Джо должен зарядить холостые и боевые патроны в барабан своего револьвера, чтобы вероятность его победы стала наибольшей?

Ответ: Джо должен зарядить свой барабан, чередуя боевые и холостые патроны.

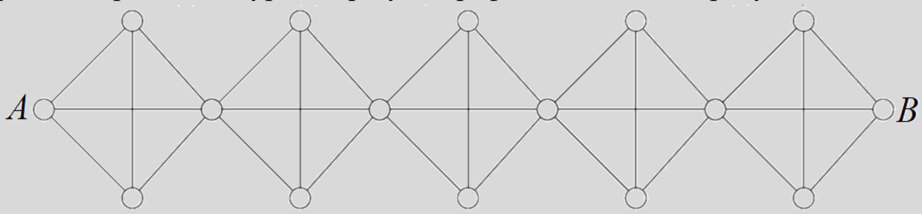
Решение . Пусть Джо уже раскрутил барабан, и патрон на позиции 1 готов к выстрелу. Но он не обязательно боевой. Обозначим p_k вероятность того, что первый боевой патрон у Джо находится на позиции k в барабане его револьвера. Здесь $k = 1, 2, ..., 6$, при этом $p_1 + ... + p_6 = 1$. Учитывая, что $p_1 = \dfrac{1}{2}$, $p_2 \le \dfrac{1}{2}$ и $p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \dfrac{1}{2} - p_2$, оценим сверху вероятность события A «*Джо победит*»:

$$P(A) = p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{4} + p_3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + p_6 \cdot \frac{1}{64} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} p_2 + \frac{1}{8}\left(p_3 + \ldots + p_6\right) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} p_2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - p_2\right) = \frac{5}{16} + \frac{1}{8} p_2 \le \frac{5}{16} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

причем неравенство обращается в равенство при $p_2 = \frac{1}{2}$.

Из $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ следует, что в барабане Джо не должно быть двух холостых патронов подряд, иначе окажется, что $p_3 > 0$. Значит, Джо должен зарядить свой барабан, чередуя боевые и холостые патроны.

Задача 5. Города и дороги в Анчурии образуют граф, показанный на рисунке.



Когда в Анчурию приходит сезон дождей, ливни размывают часть дорог, причем каждая дорога размывается с вероятностью $p = 0,5$ независимо от других дорог. Какова вероятность того, что из города A в город B по-прежнему можно будет проехать по неразмытым дорогам?

Ответ: $\frac{243}{1024}$ (приближенно 0,237).

Решение. Представим граф как объединение пяти полных графов K_4 (квадратов с диагоналями). Чтобы осталась неразмытая дорога из A в B, нужно, чтобы в каждом из пяти квадратов сохранился путь из левой вершины в правую.

Найдем вероятность того, что в результате случайного и независимого удаления ребер все пути между правой и левой вершинами в одном квадрате окажутся разорваны. Это можно сделать непосредственным перебором – получается 16 из 64 равновозможных комбинаций.

Мы применим организованный перебор. Пронумеруем ребра, как показано на рис. 1, и рассмотрим ребра 1, 2 и 3.

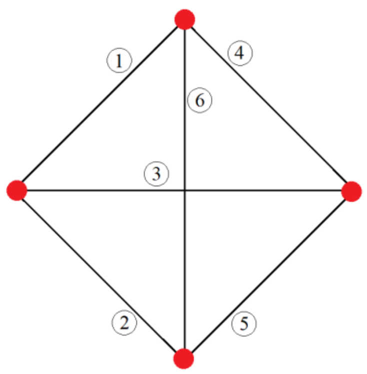


Рис. 1

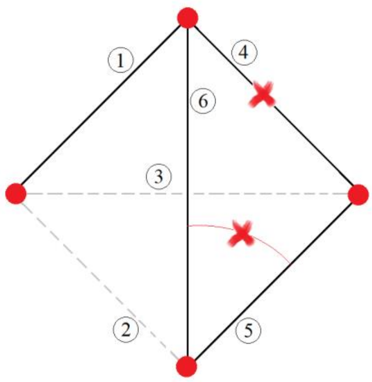


Рис. 2

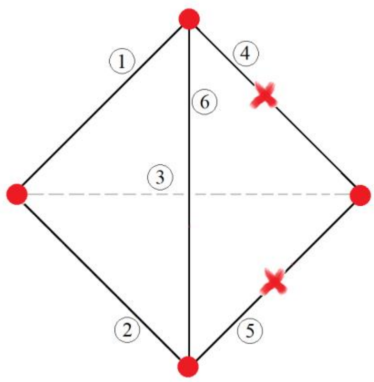


Рис. 3

Первый случай. Если удалены все эти три ребра (вероятность этого $p^3 = \frac{1}{8}$), то связь между левой и правой вершиной отсутствует, и неважно, удалены или сохранились ребра 4, 5 и 6.

Второй случай. Пусть сохранилось только ребро 1, а ребра 2 и 3 удалены (рис. 2). Вероятность этого $(1-p)p^2$. Тогда должно быть удалено ребро 4 (вероятность p) и хотя бы одно из ребер 5 и 6 (вероятность $1-(1-p)^2$). Значит, вероятность всех таких конфигураций равна

$$(1-p)p^2 \cdot p \cdot \left(1-(1-p)^2\right) = \frac{3}{64}.$$

Такова же вероятность разрыва связей, если сохранилось ребро 3, а ребра 1 и 2 удалены.

Третий случай. Сохранились ребра 1 и 2, а ребро 3 удалено (рис. 3). Вероятность этого $(1-p)^2 p$. Тогда должны быть удалены ребра 4 и 5, а удалено ли ребро 6 – неважно. Вероятность таких конфигураций $(1-p)^2 p \cdot p^2 = \frac{1}{32}$.

Таким образом, полная вероятность нарушения всех связей между левой и правой вершинами равна $\frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{64} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$. Вероятность противоположного события «*связь между левой и правой вершинами сохранилась*» равна $\frac{3}{4}$.

Чтобы из вершины A сохранился путь в вершину B, нужно, чтобы такое событие случилось в каждом квадрате. Вероятность этого равна $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} \approx 0,237$.

Задача 6. Вершины правильного 25-угольника пронумерованы по порядку. В первой вершине находится крупинка сахара, а в третьей вершине сидит муравей. В какой-то момент он начинает беспорядочно ползать из вершины в вершину. Ровно за одну минуту он переползает из вершины, где находился, в соседнюю вершину. Направление дальнейшего движения в каждой вершине он выбирает случайно. Блуждание заканчивается, как только муравей найдет крупинку сахара. Найдите математическое ожидание случайной величины «*продолжительность блуждания*».

Ответ: 46.

Решение. Пусть X_k минут – время, которое потребуется муравью, чтобы доползти из k-й вершины до первой. Можно считать, что $1 \le k \le 26$, если положить $X_1 = X_{26} = 0$. Введем случайную величину I следующим образом: $I = 1$, если муравей пополз из вершины k в вершину $k-1$, и $I = 0$, если он пополз в вершину $k+1$. Тогда при $k = 2, ..., 25$

$$X_k = I\left(X_{k-1}+1\right) + (1-I)\left(X_{k+1}+1\right)$$

Величины I и X_{k-1} независимы, точно так же независимы величины I и X_{k+1}. Поэтому, переходя к математическим ожиданиям, получаем:

$$\mathrm{E}X_k = \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}X_{k-1}+1\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}X_{k+1}+1\right), \text{ откуда } \mathrm{E}X_k = \frac{\mathrm{E}X_{k-1}+\mathrm{E}X_{k+1}}{2} + 1.$$

Сложим все эти уравнения:

$$\mathrm{E}X_2 + \ldots + \mathrm{E}X_{25} = 24 + \frac{1}{2}\mathrm{E}X_2 + \mathrm{E}X_3 + \ldots + \mathrm{E}X_{24} + \frac{1}{2}\mathrm{E}X_{25},$$

следовательно,

$$\mathrm{E}X_2+\mathrm{E}X_{25}=48.$$

Из очевидного равенства $\mathrm{E}X_2=\mathrm{E}X_{25}$ следует, что $\mathrm{E}X_2=\mathrm{E}X_{25}=24$. С другой стороны,

$$\mathrm{E}X_2=1+\frac{1}{2}\mathrm{E}X_1+\frac{1}{2}\mathrm{E}X_3.$$

Подставляя в это уравнение $\mathrm{E}X_1=0$, $\mathrm{E}X_2=24$, находим, что $\mathrm{E}X_3=46$.

Авторы задач: А. Б. Акимов, И. Р. Высоцкий, Н. А. Шихова, А. В. Шкляев, И. В. Ященко