III Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
1 февраля 2026 г.

Заключительный этап. 8 класс

Решения задач

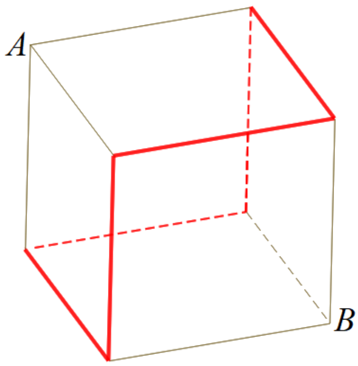
Задача 1. Пять букв слова ОЛИМП переставляют всеми возможными способами. Полученные «слова» записывают в список в лексикографическом (алфавитном) порядке. На каком месте в этом списке окажется слово ОЛИМП?

Ответ: 79.

Решение. Запишем буквы в алфавитном порядке: И, Л, М, О, П. Значит, перед словом ОЛИМП окажутся 24 слова на букву И, 24 слова на букву Л, 24 слова на букву М и 6 слов, которые начинаются с «ОИ». После всех этих слов первое же слово, начинающееся на «ОЛ», окажется словом ОЛИМП. Это слово будет $24+24+24+6+1=79$ по счету.

Задача 2. Из вершины A проволочного куба выползает муравей. Он с постоянной скоростью ползет по одному из кратчайших путей по ребрам куба в противоположную вершину B. Одновременно с ним из вершины B в вершину A выползает второй муравей. Он ползет по ребрам куба с такой же скоростью, случайным образом выбирая один из кратчайших путей. Какова вероятность того, что муравьи встретятся?

Ответ: $\frac{1}{6}$.



Решение. Каждый кратчайший путь состоит из трех ребер. Поэтому встретиться муравьи могут только в середине одного из ребер, не примыкающих ни к вершине A, ни к вершине B; эти ребра выделены на рисунке. Таких ребер 6, и в силу случайности и симметрии вероятность того, что путь второго муравья проходит через то же среднее ребро, что и путь первого, равна $\frac{1}{6}$.

Задача 3. На уроке физики Коля взвесил грузик, и у него получилось 99 г. Известно, что Коля ошибся не более чем на 10%. Валя взвесила свой грузик, и у нее вышло 72 г, причем Валя ошиблась не более чем на 20%. Учитель спросил, сколько весят их грузики вместе, и они сказали, что 171 г. На сколько процентов в бóльшую сторону они могли ошибиться?

Ответ: не более чем на 14 %.

Решение. Пусть истинные массы грузиков Коли и Вали равны k и v. По условию

$$\begin{cases} 0,9 \le \dfrac{99}{k} \le 1,1, \\ 0,8 \le \dfrac{72}{v} \le 1,2. \end{cases}$$

Из этой системы получается, что $k \ge 90$, а $v \ge 60$. Тогда $k+v \ge 150$, и $\frac{171}{k+v} \le \frac{171}{150} = 1,14$. Значит, наибольшая возможная ошибка в большую сторону равна 14 %.

Задача 4. В некоторой социальной сети 2026 пользователей, и любые двое либо являются друзьями, либо нет, но даже если нет, то как-то связаны через цепочку друзей.

Назовем пользователя *нелюдимым,* если у него друзей меньше, чем среднее число друзей его друзей. Если у пользователя друзей больше, чем среднее число друзей его друзей, то такого пользователя назовем *общительным.* Возможны ли следующие ситуации?

1) В этой сети нет ни общительных, ни нелюдимых пользователей.
2) Большинство пользователей нелюдимые.
3) Большинство пользователей общительные.

Ответ: все три возможны.

Примеры.
1) Пример: цикл на 2026 вершинах. У всех по два друга.
2) Пример: граф-звезда: 2025 пользователей имеют единственного общего друга. Эти 2025 пользователей – нелюдимые, поскольку у их общего друга 2025 друзей.
3) Пример: полный граф на 2026 вершинах, из которого удалено одно ребро. В такой сети 2024 пользователя имеют по 2025 друзей. Эти 2024 пользователя общительные. Действительно, из 2025 друзей каждого из этих пользователей 2023 имеют по 2025 друзей, а двое имеют по 2024 друга, то есть в среднем $\frac{2023 \cdot 2025 + 2 \cdot 2024}{2025}$ друзей, а это меньше чем 2025.

Задача 5. Симметричный игральный кубик подбросили трижды. Известно, что в сумме выпало 12 очков. Найдите вероятность того, что существует треугольник, длины сторон которого равны трем выпавшим числам.

Ответ: 0,4.

Решение.
Составим таблицу результатов двух первых бросков. В строках отметим исходы первого броска – числа от 1 до 6. В столбцах – исходы второго броска. В саму ячейку запишем результат третьего броска так, чтобы сумма всех трех чисел равнялась 12. Ячейки с невозможными комбинациями, где сумма двух первых бросков меньше 6 или больше 11, оставим пустыми.

	1	2	3	4	5	6
1					6	5
2				6	**5**	4
3			6	**5**	**4**	3
4		6	**5**	**4**	**3**	2
5	6	**5**	**4**	**3**	**2**	1
6	5	4	3	2	1	

Всего получается $n = 25$ равновозможных комбинаций. Жирным шрифтом выделены комбинации, для которых выполняются неравенства треугольника. Их 10. Искомая вероятность равна 0,4.

Задача 6. У Матвея есть калькулятор-усреднитель «Арифметрон-45». Если засыпать в него 45 любых чисел (ни больше, ни меньше), то он выдаст их среднее арифметическое. А срочный заказ, который поступил Матвею, содержит 2026 чисел и задание найти их среднее арифметическое.

Помогли коллеги: Корней снабдил Матвея одноразовым калькулятором-делителем. В него вводятся делимое и делитель, снизу выпадает частное, но после этого калькулятор Корнея непоправимо ломается. А Пантелей принес одноразовый сумматор: вводишь два числа, выскакивает их сумма. Но после этого сумматор Пантелея навсегда блокируется.
По условиям контракта для выполнения заказа можно использовать только эти три калькулятора, и никакие другие действия с числами невозможны. Как Матвею, имея присланные числа и неограниченный запас любых целых чисел, найти заказанное среднее?

Возможное решение. Отложим пока число x_{2026} в сторону. Остальные числа от x_1 до x_{2025} разобьём на 45 групп по 45 чисел в каждой. Пусть Матвей при помощи «Арифметрона» проведет следующие вычисления.

1. Среднее чисел в каждой группе.
2. Среднее найденных средних — получится число $A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2025}}{2025}$.
3. Среднее числа x_{2026} и 44 нулей. Получится $\frac{x_{2026}}{45}$.
4. Среднее числа $\frac{x_{2026}}{45}$ и еще 44 нулей. Получится число $B = \frac{x_{2026}}{45 \cdot 45} = \frac{x_{2026}}{2025}$.
5. Среднее числа 2026 и еще 44 нулей. Получится $\frac{2026}{45}$.
6. Среднее числа $\frac{2026}{45}$ и еще 44 нулей. Получится число $C = \frac{2026}{2025}$.

Теперь сложение на сумматоре Пантелея:

$$D = A + B = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2026}}{2025}.$$

И, наконец, деление посредством делителя Корнея:

$$D : C = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2026}}{2026}.$$

Примечание. Существует решение задачи без использования сумматора.

Авторы задач: А. Б. Акимов, И. Р. Высоцкий, Н. А. Шихова.