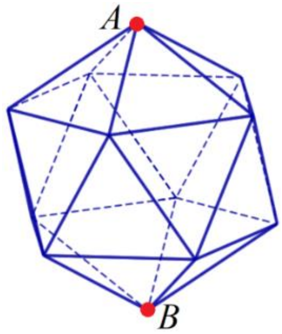
Заключительный этап. 9 класс

Решения задач



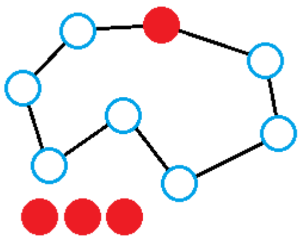
Задача 1. Правильный двадцатигранник (икосаэдр) сделан из проволоки. Из вершины A в противоположную вершину B строго по ребрам с постоянной скоростью ползет муравей. Из вершины B в вершину A также по ребрам и с такой же скоростью ползет второй муравей. Оба муравья начинают ползти одновременно и выбирают один из возможных кратчайших путей случайным образом независимо друг от друга. Какова вероятность того, что муравьи встретятся?

Ответ: 0,1.

Решение. Каждый кратчайший путь содержит три ребра. Поэтому встретиться муравьи могут только на общем втором ребре своих маршрутов. Таких ребер 10. В силу случайности и симметрии вероятность того, что оба муравья выберут маршрут, проходящий через одно и то же среднее ребро, равна 0,1.

Задача 2. У Вали в коробке 7 синих бусин и 4 красные бусины. Она вынимает все бусины по очереди в случайном порядке, нанизывает их на нитку и связывает концы нитки. Найдите вероятность того, что в получившемся ожерелье никакие две красные бусины не окажутся рядом.

Ответ: $\frac{1}{6}$.



Решение. Порядок бусин по условию случаен. Поэтому можно вообразить, что Валя уже нанизала все синие бусины и одну красную. Тем самым случайный опыт сводится к тому, что Валя случайным образом по очереди «вставляет» оставшиеся красные бусины в промежутки между уже нанизанными.

Между нанизанными бусинами 8 промежутков, из них 6 между синими бусинами. В силу случайности вторая красная бусина окажется между синими с вероятностью $\frac{6}{8}$. Теперь получилось 9 промежутков, из которых 5 между синими бусинами. Третья красная бусина окажется между синими с вероятностью $\frac{5}{9}$. Аналогично рассуждая, получим, что четвертая красная бусина окажется между синими с вероятностью $\frac{4}{10}$. Искомая вероятность равна

$$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{6}.$$

Задача 3. У Матвея есть калькулятор-усреднитель «Арифметрон-45». Если засыпать в него 45 любых чисел (ни больше, ни меньше), то он выдаст их среднее арифметическое. А срочный заказ, который поступил Матвею, содержит 2026 чисел и задание найти их среднее арифметическое.
Помогли коллеги: Корней снабдил Матвея одноразовым калькулятором-делителем. В него вводятся делимое и делитель, снизу выпадает частное, но после этого калькулятор Корнея непоправимо ломается. А Пантелей принес одноразовый сумматор: вводишь два числа, выскакивает их сумма. Но после этого сумматор Пантелея навсегда блокируется.
По условиям контракта для выполнения заказа можно использовать только эти три калькулятора, и никакие другие действия с числами невозможны.
Как Матвею, имея присланные числа и неограниченный запас целых чисел, найти заказанное среднее?

Возможное решение. Отложим пока число x_{2026} в сторону. Остальные числа от x_1 до x_{2025} разобьём на 45 групп по 45 чисел в каждой. Пусть Матвей при помощи «Арифметрона» проведет следующие вычисления.

1. Среднее чисел в каждой группе.
2. Среднее найденных средних — получится число $A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2025}}{2025}$.
3. Среднее числа x_{2026} и 44 нулей. Получится $\frac{x_{2026}}{45}$.
4. Среднее числа $\frac{x_{2026}}{45}$ и еще 44 нулей. Получится число $B = \frac{x_{2026}}{45 \cdot 45} = \frac{x_{2026}}{2025}$.
5. Среднее числа 2026 и еще 44 нулей. Получится $\frac{2026}{45}$.
6. Среднее числа $\frac{2026}{45}$ и еще 44 нулей. Получится число $C = \frac{2026}{2025}$.

Теперь сложение на сумматоре Пантелея:

$$D = A + B = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2026}}{2025}.$$

И, наконец, деление посредством делителя Корнея:

$$D : C = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2026}}{2026}.$$

Примечание. Существует решение, в котором сумматор не используется.

Задача 4. Робот-чертежник рисует графы. Перемещение пера Робота между любыми двумя вершинами занимает ровно секунду. Если между этими вершинами нужно нарисовать ребро, то перо Робота при движении опущено. Если ребро рисовать не нужно, то перо поднято. На то, чтобы опустить или чтобы поднять перо, робот также тратит секунду. Одно и то же ребро рисовать дважды запрещается. Лишних движений Робот не делает и любой граф рисует за наименьшее возможное время.

Какой граф Робот нарисует быстрее и на сколько секунд: полный[1] граф K_8 или полный граф K_9?

Ответ: граф K_9 Робот построит быстрее на 1 секунду, чем граф K_8.

[1] Полным графом K_n называется граф без петель, в котором ровно n вершин и две любые вершины соединены единственным ребром.

Решение. Для определенности будем считать, что при рисовании обоих графов перо поднято в начале и в конце работы. Если Робот, не поднимая пера, рисует замкнутый путь, то к каждой вершине построенного графа примыкает четное количество ребер. Следовательно, если вершина графа имеет нечетную степень, то она является началом или концом одного из незамкнутых путей, нарисованных Роботом. Граф K_8 содержит 8 вершин степени 7 и $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ ребер. На рисование ребер Робот потратит 28 секунд. Поскольку все 8 вершин имеют нечетную степень, граф состоит из 4 незамкнутых путей, причем все концы этих путей в различных вершинах. На перемещение от конца предыдущего пути к началу следующего Робот тратит по секунде – всего 3 секунды. Еще 8 секунд уйдет на опускание и подъем пера в начале и конце каждого пути. Итого $28+3+8=39$ секунд.

Граф K_9 содержит 9 вершин степени 8 и $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ ребер. Поскольку все вершины имеют четную степень, этот граф содержит эйлеров цикл, и Робот построит его «одним росчерком пера». Он потратит 36 секунд на рисование ребер и еще две секунды на опускание и подъем пера в начале и в конце работы. Итого 38 секунд.

Задача 5. В тесте 20 вопросов, на каждый из которых можно ответить «да» или «нет». За каждый верный ответ Коля получает 1 балл. Коля отвечает на вопросы до тех пор, пока на очередной вопрос он не ответит неправильно: при первой же ошибке тест завершается.

Всего у Коли 10 попыток сдать тест. В каждой следующей попытке ни вопросы, ни их порядок не меняются. Так продолжается до тех пор, пока Коля не ответит верно на все вопросы или не исчерпает все попытки.

На все вопросы Коля отвечает наугад, поскольку ответов он не знает. Зато он пользуется информацией, полученной в предыдущих попытках: если с первого раза он не угадал ответ на новый для себя вопрос, то в следующей попытке он ответит на него верно.

а) Какое наименьшее гарантированное количество баллов получит Коля?

б) Какова вероятность того, что Коля получит ровно 10 баллов?

Ответ: а) 9; б) $\frac{5}{1024}$.

Решение. Если с первой попытки Коля отвечает неверно на первый вопрос, то со второй он ответит на него верно и попробует ответить на второй вопрос. При неудаче он ответит на него верно с третьей попытки и так далее. Значит, гарантированное число верных ответов на единицу меньше числа попыток, то есть 9.

Коля ответил не на все вопросы. Значит, он израсходовал все 10 попыток. Событие «10 *баллов*» наступает, только если Коля в этих 10 попытках всего получил 11 вопросов, на один из первых десяти угадал ответ сразу, еще на 9 – со второго раза, а на последний, 11-й вопрос в своей десятой попытке ответил неверно. Пометим символом 1 вопросы, на которые Коля угадал ответ сразу, а символом 0 – вопросы, ответ на которые Коля с первого раза не угадал. Получаем бинарные последовательности длины 11, в которых одна единица, но не на последнем месте:

$$10000000000,\quad 01000000000,\quad 00100000000,\quad \ldots,\quad 00000000010.$$

Таких последовательностей 10, а вероятность каждой равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{1}{2048}$. Значит, вероятность события «10 *баллов*» равна

$$10\cdot\frac{1}{2048}=\frac{5}{1024}.$$

Задача 6. Ковбои Билл и Джо стреляют без промаха. Они решили посоревноваться в удачливости. Каждый зарядил свой 10-зарядный револьвер пятью боевыми патронами и пятью холостыми.

Билл и Джо одновременно стреляют каждый по своей мишени. Они стреляют до тех пор, пока хотя бы одна из мишеней не будет поражена. Если попал в свою мишень кто-то один – он победитель. Если попали оба, объявляется ничья. После каждого выстрела барабан револьвера автоматически поворачивается на одно гнездо, подставляя под боек следующий патрон. Билл случайным образом раскручивает барабан своего револьвера перед каждым выстрелом, а Джо решил раскрутить свой барабан наудачу только перед первым выстрелом.

В каком порядке Джо должен зарядить холостые и боевые патроны в барабан своего револьвера, чтобы вероятность его победы оказалась наибольшей?

Ответ: боевые и холостые патроны должны чередоваться.

Решение . Пусть Джо уже раскрутил барабан, и патрон на позиции 1 готов к выстрелу. Но он не обязательно боевой. Обозначим p_k вероятность того, что первый боевой патрон у Джо находится на позиции k в барабане его револьвера. Здесь $k=1,2,...,6$, при этом $p_1+...+p_6=1$. Учитывая, что $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2\le\frac{1}{2}$ и $p_3+p_4+p_5+p_6=\frac{1}{2}-p_2$, оценим сверху вероятность события A «*Джо победит*»:

$$\mathrm{P}(A)=p_1\cdot\frac{1}{2}+p_2\cdot\frac{1}{4}+p_3\cdot\frac{1}{8}+...+p_6\cdot\frac{1}{64}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{8}(p_3+...+p_6)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-p_2\right)=\frac{5}{16}+\frac{1}{8}p_2\le\frac{5}{16}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

причем неравенство обращается в равенство при $p_2=\frac{1}{2}$.

Из $p_1=p_2=\frac{1}{2}$ следует, что в барабане Джо не должно быть двух холостых патронов подряд, иначе окажется, что $p_3>0$. Значит, Джо должен зарядить свой барабан, чередуя боевые и холостые патроны.

Авторы задач: И. Р. Высоцкий, Н. А. Шихова, А. В. Шкляев, И. В. Ященко