

Заключительный этап. 11 класс

Задача 1. В инструкции к лекарству написано, что возможны следующие побочные эффекты:

- часто (с вероятностью от $1/100$ до $1/10$) — головная боль;
- нечасто (от $1/1000$ до $1/100$) — тошнота;
- редко (от $1/10000$ до $1/1000$) — вазомоторное расстройство.

Известно, что эти данные точны и что различные побочные эффекты независимы. Найдите интервал, в котором содержится вероятность того, что у пациента не будет никаких побочных эффектов. Границы интервала округлите до тысячных.

Задача 2. В тесте бесконечно много вопросов, на каждый из которых можно ответить «да» или «нет». Коля отвечает на вопросы до тех пор, пока на очередной вопрос он не ответит неправильно: при первой же ошибке тест завершается.

Всего у Коли 10 попыток сдать тест. В каждой следующей попытке ни вопросы, ни их порядок не меняются. Так продолжается до тех пор, пока Коля не исчерпает все попытки.

Ответов Коля не знает и поэтому на все вопросы отвечает наугад. Зато он пользуется информацией, полученной в предыдущих попытках: если с первого раза Коля не угадал ответ на новый для себя вопрос, то в следующей попытке он ответит на него верно.

Найдите математическое ожидание числа вопросов, на которые Коля в конце концов ответит верно.

Задача 3. Рассеянный Ученый проводит собеседование со Студентом.

— Ну-с, молодой человек, проверим вашу везучесть. Я дам Вам число 1 и еще два совершенно случайных и независимых друг от друга числа из отрезка $[0; a]$, где $a > 0$. Я возьму Вас ассистентом, только если Вы построите треугольник, длины сторон которого равны трем имеющимся у Вас числам. Так и быть, число a Вы вольны выбрать сами.

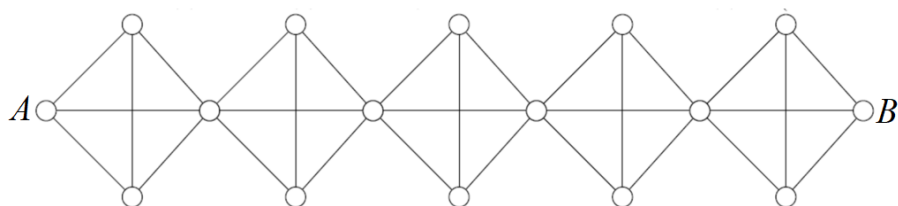
Какое число должен назвать Студент, чтобы вероятность существования такого треугольника оказалась наибольшей?

Задача 4. Ковбои Билл и Джо стреляют без промаха. Они решили посоревноваться в удачливости. Каждый зарядил свой 10-зарядный револьвер пятью боевыми патронами и пятью холостыми.

Билл и Джо одновременно стреляют каждый по своей мишени. Они стреляют до тех пор, пока хотя бы одна из мишеней не будет поражена. Если попал в свою мишень кто-то один — он победитель. Если попали оба, то объявляется ничья. После каждого выстрела барабан револьвера автоматически поворачивается на одно гнездо, подставляя под боек следующий патрон. Билл случайным образом раскручивает барабан своего револьвера перед каждым выстрелом, а Джо решил раскрутить свой барабан наудачу только перед первым выстрелом.

В каком порядке Джо должен зарядить холостые и боевые патроны в барабан своего револьвера, чтобы вероятность его победы оказалась наибольшей?

Задача 5. Города и дороги в Анчурии образуют граф, показанный на рисунке.



Когда в Анчурии приходит сезон дождей, ливни размывают часть дорог, причем каждая дорога размывается с вероятностью $p = 0,5$ независимо от других дорог. Какова вероятность того, что из города A в город B по-прежнему можно будет проехать по неразмытым дорогам?

Задача 6. Вершины правильного 25-угольника пронумерованы по часовой стрелке. В первой вершине находится крупинка сахара, а в третьей вершине сидит муравей. В какой-то момент он начинает беспорядочно ползать из вершины в вершину. Ровно за одну минуту он переползает из вершины, где находился, в соседнюю вершину. Направление дальнейшего движения в каждой вершине он выбирает случайно. Блуждание заканчивается, как только муравей найдет крупинку сахара. Найдите математическое ожидание случайной величины «*продолжительность блуждания*».

Авторы задач: А. Б. Акимов, И. Р. Высоцкий, Н. А. Шихова, А. В. Шкляев, И. В. Яценко