Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXVI Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
17 февраля 2013 года

Задачи и решения подготовили:

В. Д. Арнольд, А. Г. Банникова, А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова, С. А. Дориченко, А. А. Заславский, Т. В. Казицына, В. А. Клепцын, А. К. Кулыгин, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, М. А. Раскин, И. В. Раскина, А. В. Хачатурян, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко.

При поддержке

6 класс

Задача 1. Вася умножил некоторое число на 10 и получил простое число. А Петя умножил то же самое число на 15, но всё равно получил простое число. Может ли быть так, что никто из них не ошибся? **[*3 балла*]** (*В. А. Клепцын*)

Ответ. Да.

Решение. Это могло быть число 0,2. В самом деле, $0{,}2 \cdot 10 = 2$ и $0{,}2 \cdot 15 = 3$ — простые числа.

Комментарий. Можно доказать, что приведенный пример единственный. Пусть Вася получил число p, а Петя — число q. По условию задачи $\frac{p}{10} = \frac{q}{15}$. Отсюда $3p = 2q$. Значит, p — чётное простое число, т. е. $p = 2$, $q = 3$, а исходное число $\frac{p}{10} = \frac{q}{15} = 0{,}2$.

Задача 2.

Вот ребус довольно простой:
ЭХ вчетверо больше, чем ОЙ.
АЙ вчетверо больше, чем ОХ.
Найди сумму всех четырёх.

[*4 балла*] (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. 150.

Решение. Цифры Й и Х чётные, потому что ЭХ и АЙ делятся на 4. Числа ОЙ и ОХ меньше, чем 25, иначе, будучи умноженными на 4, они перестанут быть двузначными. Значит, $\text{О} = 2$ или $\text{О} = 1$. Рассмотрим первый случай. Число 20 в качестве ОХ или ОЙ не годится, так как 80 кончается на ту же цифру. Не годится и 22 с одинаковыми цифрами. Остаётся только 24, но числа ОЙ и ОХ должны быть различными.

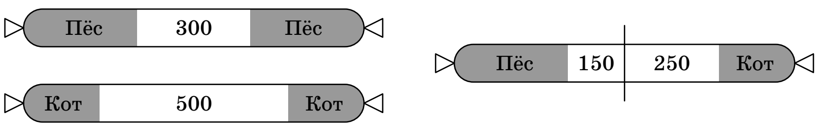
Итак, $\text{О} = 1$. Число 10 не подходит по той же причине, что и 20. Взяв $\text{ОХ} = 16$, получим $\text{АЙ} = 64$, но тогда $\text{А} = \text{Х}$, чего быть не должно. По той же причине $\text{ОЙ} = 16$ также невозможно. Взяв $\text{ОХ} = 14$, найдём $\text{АЙ} = 56$, тогда $\text{ОЙ} = 16$, а это, как мы видели, невозможно. Итак, ОХ и ОЙ могут быть равны только 12 и 18 (в любом порядке), а ЭХ и АЙ тогда равны 48 и 72 соответственно. Находим сумму: $12 + 48 + 18 + 72 = 150$.

Комментарий. Ответ можно получить, не находя самих чисел. Как мы знаем, $\text{О} = 1$, а цифры Й и Х чётные. С другой стороны, если к любому четному числу прибавить число, в 4 раза большее, то получится число, делящееся на 10. Следовательно, $\text{Й} + \text{Х} = 10$. Тогда $\text{ОЙ} + \text{ОХ} = 10 + 10 + 10 = 30$, а сумма всех четырех чисел в пять раз больше, т. е. 150.

Задача 3. Пёс и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пёс откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 г больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут? **[*5 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 400 г.

Решение. Если два одинаковых пса ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 300 г. Если два одинаковых кота ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 500 г (см. рисунок).



Видно, что пёс откусывает на $(500-300):2=100$ г больше, чем кот. Значит, когда пёс и кот откусят свои куски и убегут, останется $300+100=400$ г колбасы.

Можно рассуждать иначе. Пёс собирается откусить от батона на 300 г меньше, чем оставить. Если бы он откусил на 150 г больше, оставив на 150 г меньше, то ему досталась бы ровно половина всей колбасы. Аналогично, коту досталась бы половина всей колбасы, если бы он откусил на 250 г больше, чем собирался. При этом вся колбаса была бы съедена, поэтому остаток весит $150+250=400$ г.

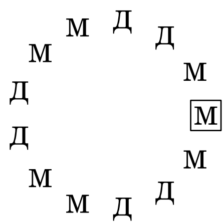
Комментарий. Задачу можно решить и алгебраически (см. решения задач для седьмого класса).

Задача 4. 13 детей сели за круглый стол и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребёнок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом? **[*6 баллов*]** (*А. В. Хачатурян*)

Ответ. 7.

Решение. Понятно, что за столом были и мальчики, и девочки. Посмотрим, как сидели дети. За группой сидящих рядом мальчиков следует группа девочек, затем снова мальчики, снова девочки и так далее (группа может состоять и из одного человека). Группы мальчиков и девочек чередуются, поэтому их чётное число. Неверные утверждения звучали на переходах от группы к группе, то есть их тоже чётное число. Так как утверждений «большинство из нас мальчики» прозвучало семь, то неверны шесть утверждений «большинство из нас девочки», и групп тоже было шесть.

Чередование верных и неверных утверждений означает, что в группах было по двое детей. Лишь сидящие рядом первый и последний ребенок сказали одно и то же, поэтому в их группе три человека. Это мальчики, так как их большинство. Всего за столом сидели $2+2+2=6$ девочек и $2+2+3=7$ мальчиков.



На рисунке показано, как именно ребята сидели за столом. Первый говорящий обведен в рамочку.

Задача 5. Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (см. рис. 1). Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если на нём нечётное число графств. Сколько графств у вас получилось? **[*7 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

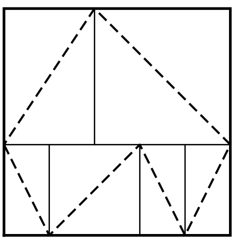


Рис. 1

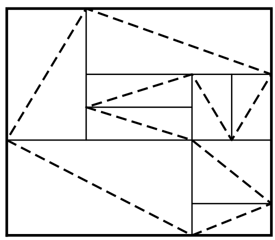


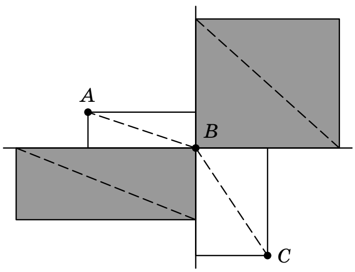
Рис. 2

Ответ. На рисунке 2 приведен пример для 9 графств.

Комментарий. Покажем, что для 7 графств (или меньше) примера не существует, заодно указав свойство, характерное для всех таких примеров.

Все дороги можно поделить на два типа: одни дороги соединяют левый верхний угол графства с правым нижним, а другие — левый нижний с правым верхним. Если бы при прохождении замкнутого пути дороги разных типов всегда чередовались, их общее количество было бы чётным (совсем как групп мальчиков и девочек в предыдущей задаче). На Большом острове, где число графств нечётно, обязательно, стало быть, будут две дороги одного типа подряд.

Пусть, например, подряд идут дороги AB и BC одного типа (см. рисунок). Помимо графств, в которых они проведены, к вершине B примыкают ещё два, закрашенных серым цветом. Дороги в этих графствах по условию не проходят через точку B. Проведём их.



Теперь на рисунке четыре дороги. Чтобы всего их было семь, нужно тремя отрезками соединить их в единую цепь. Для этого придется соединять отрезком какие-то два конца дорог в «серых графствах», а это невозможно.

Задача 6. Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

а) жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

б) жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну? [*8 баллов*] (*И. В. Раскина, А. В. Хачатурян*)

Ответ. а) 31 монета; б) 30 монет.

Решение. С каждого отряда в N богатырей Черномор получит в лучшем случае $N-1$ монету, так как остаток меньше делителя. Значит, всего он получит не более, чем $33-K$ монет, где K — число отрядов. Получит ли Черномор 32 монеты, если отряд всего один? Нет, так как $240:33=7$ (ост. 9), так что Черномору достанется лишь 9 монет. Он может попытаться получить 31 монету, разделив богатырей на два отряда.

Если (пункт а) деньги делить не обязательно поровну, то это вполне можно сделать. Например, пусть в первом отряде 32 богатыря, а во втором всего один. Тогда можно дать первому отряду 63 монеты (из которых Черномор и получит 31), а остальные 177 монет отдать единственному богатырю из второго отряда. Есть и много других способов дележа.

Однако если (пункт б) деньги делить поровну, то так сделать не удастся. Чтобы показать это, конечно, можно перебрать все варианты разделения богатырей на два отряда, но можно поступить проще. Если, выдав отряду в N человек 120 монет, Черномор рассчитывает получить $N-1$ монету, то число 121 должно делиться на N. Однако 121 делится только на 1, 11 и 121, а из двух таких чисел невозможно сложить 33.

А вот получить в пункте б) 30 монет удастся, если поделить богатырей на три отряда и выдать каждому отряду по $240:3=$ $=80$ монет. Численность каждого отряда должна быть делителем числа $80+1=81$. Из трёх делителей числа 81 сложить 33 можно: $33=27+3+3$. Проверим: с отрядов из трёх человек Черномор получит по 2 монеты, а с отряда в 27 человек — 26 монет, всего $26+2+2=30$.

7 класс

Задача 1. См. задачу 3 для 6 класса. [*4 балла*]

Ответ. 400 г.

Решение. См. решения задач для 6 класса.

Задачу можно решить и алгебраически. Пусть пёс собирается откусить на на d грамм больше, чем кот, а кусок между псом и котом весит x грамм. По условию

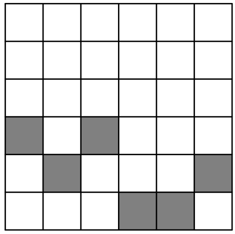
$$\begin{cases} x-d=300, \\ x+d=500. \end{cases}$$

Значит,

$$(x-d)+(x+d)=300+500,$$

то есть $2x=800$, а $x=400$.

Задача 2. В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат:



а) за 5 или менее;

б) за 4 или менее;

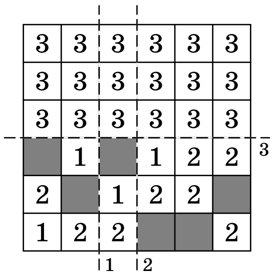
в) за 3 или менее таких перегибания?

(Если да, впишите в каждую клетку номер сгибания, после которого она будет закрашена впервые, линию сгиба проведите и пометьте той же цифрой. Если нет, докажите это.) **[*4 балла*]**

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, М. А. Раскин, И. В. Ященко*)

Ответ. Можно (даже за 3 перегибания).

Решение. Можно, например, закрасить двумя вертикальными перегибаниями всю нижнюю половину доски, после чего закрасить верхнюю половину одним горизонтальным перегибанием — см. рисунок. (Есть и другие решения.)



Комментарий. Закрасить все клетки за 2 перегибания нельзя. Действительно, при каждом перегибании количество клеток увеличивается не более чем в 2 раза. Вначале закрашенных клеток 6; значит, после двух перегибаний будет закрашено не более $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ клеток из 36.

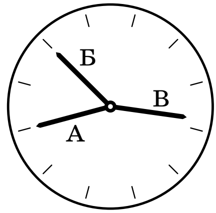
Задача 3. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом? **[*4 балла*]**

(*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 10 человек.

Решение. Пусть за столом сидело n человек. Тогда первый на втором круге взял $n+1$ семечку, второй $n+2$ — и вообще каждый взял на n семечек больше, чем на первом. Все вместе на втором круге взяли на $n \cdot n = n^2$ больше семечек, чем на первом. Так как $n^2 = 100$, то $n = 10$.

Задача 4. Дима увидел в музее странные часы (см. рисунок). Они отличаются от обычных часов тем, что на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да ещё секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы?



(Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.) **[*6 баллов*]** (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. Без десяти пять.

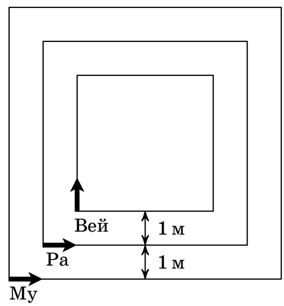
Решение. Подумаем, какая из стрелок часовая. Если бы часовая стрелка смотрела ровно на часовую отметку, минутная и секундная стрелка смотрели бы ровно на отметку «12» — но на картинке нет совпадающих стрелок. Значит, часовая стрелка — стрелка В.

Оставшиеся 2 стрелки указывают ровно на часовые отметки, поэтому сейчас сколько-то часов и целое число минут — в частности, секундная стрелка указывает на 12.

Если секундная стрелка — стрелка А, то на часах немного меньше семи часов (судя по часовой стрелке), а с другой стороны — сейчас на 10 минут больше, чем сколько-то часов (судя по минутной). Так быть не может.

Если же секундная стрелка — стрелка Б, то на часах около пяти часов (судя по часовой стрелке), а судя по минутной стрелке — на 10 минут меньше, чем сколько-то часов. Значит, на часах без десяти пять.

Задача 5. Три квадратные дорожки с общим центром отстоят друг от друга на 1 м (см. рис.). Три муравья стартуют одновременно из левых нижних углов дорожек и бегут с одинаковой скоростью: Му и Ра против часовой стрелки, а Вей по часовой. Когда Му добежал до правого нижнего угла большой дорожки, двое других, не успев ещё сделать полного круга, находились на правых сторонах своих дорожек, и все трое оказались на одной прямой. Найдите стороны квадратов. **[*6 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)



Ответ. 4 м, 6 м, 8 м.

Решение. Длины сторон двух соседних дорожек отличаются на 2 м (рис. 3). Поэтому в момент, когда Му добежал до угла, Ра пробежал по правой стороне дорожки 2 м и находился на расстоянии $2+1=3$ м от «нижней» стороны внешней дорожки. Поскольку Ра находится посредине между Му и Веем, Вей в этот момент находится на вдвое большем расстоянии от этой стороны, 6 м (т. к. два выделенных на рис. 4 прямоугольных треугольника равны по гипотенузе и углам). То есть Вею остаётся ещё пробежать по боковой стороне $6-1-1=4$ м.

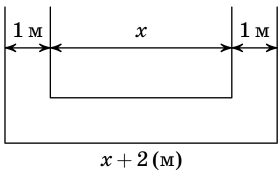


Рис. 3

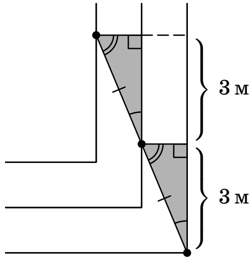


Рис. 4

Но если бы Вей бежал против часовой стрелки, то он пробежал бы всю нижнюю сторону и ещё 4 м по правой стороне (так как эта сторона на 4 м короче стороны внешнего квадрата), т. е. оказался бы в той же точке. Раз Вей попадает в одну и ту же точку, двигаясь и по часовой стрелке, и против часовой стрелки, эта точка — правый верхний угол квадрата. То есть сторона этого квадрата равна 4 м. Соответственно, стороны двух других квадратов равны $4+2=6$ м и $6+2=8$ м.

Задача 6. Лиса Алиса и кот Базилио вырастили на дереве 20 фальшивых купюр и теперь вписывают в них семизначные номера. На каждой купюре есть 7 пустых клеток для цифр. Базилио называет по одной цифре «1» или «2» (других он не знает), а Алиса вписывает названную цифру в любую свободную клетку любой купюры и показывает результат Базилио.

Когда все клетки заполнены, Базилио берет себе как можно больше купюр с разными номерами (из нескольких с одинаковым номером он берет лишь одну), а остаток забирает Алиса. Какое наибольшее количество купюр может получить Базилио, как бы ни действовала Алиса? [***8 баллов***] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 2.

Решение. Две купюры Базилио всегда может получить: он знает место, куда должна быть вписана самая последняя цифра, и называет её так, чтобы она отличалась от цифры на таком же месте у какой-нибудь другой купюры. Тогда у этих двух купюр номера будут разные, и кот сможет их взять.

Покажем, как Алиса может добиться, чтобы разных номеров было не больше двух. Она располагает купюры одну над другой, чтобы клетки для цифр образовали таблицу.

Когда кот называет единицу, Алиса вписывает её в самый левый столбец, где есть свободная клетка (в любую из клеток), а когда кот называет двойку — в самый правый.

Если в какой-то столбец начали попадать и единицы, и двойки, то все остальные столбцы уже заполнены: слева — единицами, справа — двойками. Значит, будет максимум один столбец, куда попадут и единицы, и двойки. Поэтому если номера и отличаются, то только цифрой в этом столбце. Но так как цифр только две, то и разных номеров не больше двух.

1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	$\square$	2	2	2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	1	1	$\square$	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	1	1	2	2	2	2

Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2013 году

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы	Сроки
2	(499) 137-17-69 (499) 137-69-31 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	7, 8	март—май
25	sch25.ru nabor@mathbaby.ru	Университетский просп., 7 (м. «Университет»)	7; добор в 8	с февраля
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8	февраль—май
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.msk.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8	с 13 марта по средам
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	7, 8	с 22 марта
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85 www.sch192.ru	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5, 7; добор в 8	апрель—май по пятницам в 16^{00}
218	(499) 976-19-85 school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (ИУП)	с 25 марта по 18 мая
444	(495) 465-23-52 (495) 465-60-52 schv444.mskobar.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	8	март—май
1329	co1329.mskzapad.ru nabor@mathbaby.ru	ул. Никулинская, 10 (м. «Юго-Западная»)	5, 8	с февраля
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8	апрель
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «ул. Горчакова»)	5—7; добор в 8	апрель
Интел- лектуал	(499) 445-52-10 sch-int.ru	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар»)	5; добор в 6, 7	март—июнь

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте www.mccme.ru

Оперативная информация об олимпиадах — на сайте www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mccme.ru/matprazdnik/